

LONG-RANGE SCATTERING FOR NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH TIME-DECAYING HARMONIC POTENTIAL

川本昌紀 (愛媛大学)

1. 概略

$\sigma(t) \in L^\infty(\mathbf{R}_t)$ についての 2 階常微分方程式

$$\zeta_j''(t) + \sigma(t)\zeta_j(t) = 0, \quad \begin{cases} \zeta_1(0) = 1, \\ \zeta_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta_2(0) = 0, \\ \zeta_2'(0) = 1 \end{cases}$$

を考察する。この時、2つの線型独立解 $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ は以下の性質を持つと仮定する；

仮定 1: 次の (A), (B), (C) を満たす定数 $r_0 > 0, c_{1,\pm}, c_{2,\pm} \notin \{0, \infty, -\infty\}, c_{3,\pm} \in \mathbf{R}, \lambda \in [0, 1/2)$ が存在する；

(A). 任意の $|t| \geq r_0$ に対して、定数 $c > 0$ が存在して $|\zeta_2(t)| \geq c$.

$$(B). \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\zeta_1(t)}{(\pm t)^\lambda} = c_{1,\pm}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\zeta_2(t)}{(\pm t)^{1-\lambda}} = c_{2,\pm}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{|\zeta_2(t) - c_{2,\pm}(\pm t)^{1-\lambda}|}{(\pm t)^\lambda} = c_{3,\pm}$$

(C). $\zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_1'(t), \zeta_2'(t)$ は連続関数である。

注意 1: $\sigma_0 \in [0, 1/4)$ に対して $\sigma(t) = \sigma_0 t^{-2}$ for $|t| \geq r_0$ とすると、 $\lambda = (1 - \sqrt{1 - 4\sigma_0})/2$ として上の仮定を満たすモデルが存在する。この意味で "時間減衰" としている。詳しくは Geluk-Marić-Tomić [1] を参照。

上記の仮定 1 の下で、本講演では 以下の時間減衰ポテンシャル付き非線形シュレディンガー方程式について考察する：

$$i\partial_t u(t, x) = -\frac{\Delta}{2}u(t, x) + \frac{\sigma(t)|x|^2}{2}u(t, x) + \mu|u(t, x)|^{2/(n(1-\lambda))}u(t, x)$$

ここで、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, n = 1, 2, 3, \Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2, \mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ である。線型方程式の解作用素 $U_0(t, 0)$ は、任意の $\phi \in \mathcal{D}(-\Delta + |x|^2)$ に対して

$$i\partial_t U_0(t, s)\phi = H_0(t)U_0(t, s)\phi, \quad i\partial_s U_0(t, s)\phi = -U_0(t, s)H_0(s)\phi,$$

$$U_0(t, t)\phi = \phi, \quad U_0(t, s)\mathcal{D}(-\Delta + |x|^2) \subset \mathcal{D}(-\Delta + |x|^2)$$

$$H_0(t) := -\Delta/2 + \sigma(t)|x|^2/2$$

を満たすものとする。この時、 $|t| \geq r_0$ に対して以下の MDFM 分解が得られる；

$$U_0(t, 0) = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \zeta_2(t) \\ \zeta_2'(t) \end{pmatrix} \mathcal{D}(\zeta_2(t)) \mathcal{F} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \zeta_2(t) \\ \zeta_1(t) \end{pmatrix}$$

ここで \mathcal{F} は Fourier 変換であり、 $\phi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$(\mathcal{M}(t)\phi)(x) = e^{i|x|^2/(2t)}\phi(x), \quad (\mathcal{D}(t)\phi)(x) = \frac{1}{(it)^{n/2}}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$$

である。最後に $0 \leq \lambda = \lambda(n) < 1/2$ に以下の仮定を課す；

仮定 2: $\lambda = \lambda(n)$ は以下の条件を満たすとする；

$$0 \leq \lambda(1) < \frac{13 - \sqrt{145}}{4}, \quad 0 \leq \lambda(2) < \frac{7 - \sqrt{41}}{4}, \quad 0 \leq \lambda(3) < 0.022$$

定数 k と α を以下で定める；

$$0 < k < 1 + \frac{2}{n(1-\lambda)}, \quad 0 < \alpha < \min(1, k/2 - n\lambda/4), \quad \left(\text{i.e. } k > \frac{n\lambda}{2}\right).$$

以上のセッティングの下で以下の定理を得た；

定理:[3] 仮定 1,2 を仮定する。さらに、定数 $k, \alpha, b > 0$ は

$$\frac{n(-2\lambda^2 + \lambda + 1)}{4} < b < \lambda + \alpha(1 - 2\lambda)$$

を満たしているとする。終値データ u_+ は $\widehat{u}_+ \in H^k(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$ で $\|\widehat{u}_+\|_\infty < \epsilon \ll 1$ とする。この時、 $0 < T = T(\epsilon)$ があって、

$$\sup_{t \in [T, \infty)} t^b \|u(t, \cdot) - u_p(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} < \infty$$

が成り立つ。ここで $c_+ := |c_{2,\pm}|^{1/(1-\lambda)}$ に対して、

$$u_p(t) := \mathcal{M}\left(\frac{\zeta_2(t)}{\zeta_2'(t)}\right) \mathcal{D}(\zeta_2(t)) \mathcal{F}\left[\widehat{u}_+ \exp\left(-i\mu |\widehat{u}_+|^{2/(n(1-\lambda))} (\log t)/c_+\right)\right]$$

が成り立つ。

注意 2: Kawamoto-Miyazaki [4] により、 λ の条件は仮定 2 よりも良くなる事が証明されている。

証明のアイデアのおおよそは Hayashi-Naumkin-Wang [2] によるが、ここで、この線形解に対するストリッカーツ評価式に時間に関する重みが出てきてしまう (例えば Kawamoto-Yoneyama [6])。この問題を解決するために、時間重みつきエネルギー空間 X_T を

$$X_T := \left\{ \phi \in C([T, \infty); \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)); \|\phi\|_X = \sup_{\tau \geq T} \tau^b \|\phi\|_{\infty, 2, \lambda, \tau} + \sup_{\tau \geq T} \tau^{b-2\lambda} \|\phi\|_{\beta_n, \alpha_n, \lambda, \tau} < \infty \right\}$$

で定め、この空間上での縮小写像を構成する。ここで

$$\|u\|_{a,b,c,\tau} = \begin{cases} \|\langle t \rangle^{-c/a} \|u(t, \cdot)\|_{L^b(\mathbf{R}^n)}\|_{L_t^a(\tau, \infty)}, & a \neq \infty, \\ \sup_{t \geq \tau} \langle t \rangle^{-c} \|u(t, \cdot)\|_{L^b(\mathbf{R}^n)}, & a = \infty \end{cases}$$

である。また本研究の応用として、近年、次の2つの研究も行なっている；

- (I). より一般の非線形項がついた場合における終値問題 (宮崎隼人氏 (香川大学) との共同研究 [4]),
- (II). $\mu \in \mathbf{C}$ で $\text{Im}\mu < 0$ の場合での mass などの減衰評価 (佐藤拓也氏 (東北大学) との共同研究 [5]).

これらの研究では、MDFM 分解やストリカーツ評価式を用いる事で、 $\sigma(t) \equiv 0$ の場合と同様の議論が扱える事が強く効いている。

REFERENCES

- [1] Geluk, J. L., Marić, V., Tomić, M.: On regularly varying solutions of second order linear differential equations, *Differential and Integral Equ.*, **6**, 329–336, (1993).
- [2] Hayashi, N., Naumkin, I.P., Wang, H.: Modified wave operators for nonlinear Schrödinger equations in lower order Sobolev spaces, *J. Hyperbolic Differ. Eqn.*, **8**, 759–775 (2011)
- [3] Kawamoto, M.: Final state problem for nonlinear Schrödinger equations with time-dependent harmonic oscillators, *J. Math. Anal. Appl.*, **503**, (2021), 125292 (17 pages).
- [4] Kawamoto, M., Miyazaki, H.: Long-range scattering for a critical homogeneous type nonlinear Schrödinger equation with time-decaying harmonic potentials, arXiv:2206.08168.
- [5] Kawamoto, M., Sato, T.: Asymptotic behavior of solutions to a dissipative nonlinear Schrödinger equation with time-dependent harmonic potentials, *J. Differ. eqn.*, **345**, (2023), 418–446.
- [6] Kawamoto, M., Yoneyama, T.: Strichartz estimates for harmonic potential with time-decaying coefficient, *J. Evol. Eqn.* **18**, 127–142 (2017) .

EMAIL: KAWAMOTO.MASAKI.ZS@EHIME-U.AC.JP