非線型シュレディンガー方程式系における
長時間挙動のいくつかの例について

眞崎　聡　(北海道大学 大学院理学研究院)

次の非線型シュレディンガー方程式系を考える:

$$\begin{cases}(i\partial_t+\partial_x^2)u_1=(3p_2+p_3+2p_4)|u_1|^2u_1+(p_1+p_5)(2|u_1|^2u_2+u_1^2\overline{u_2})\\ \qquad\qquad +(p_2-p_3)(2u_1|u_2|^2+\overline{u_1}u_2^2)-(p_1-p_5)|u_2|^2u_2\\ \qquad\qquad -4p_1\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2)u_1+\mathcal{V}(u_1,u_2)u_1,\\ (i\partial_t+\partial_x^2)u_2=(p_1+p_5)|u_1|^2u_1+(p_2-p_3)(2|u_1|^2u_2+u_1^2\overline{u_2})\\ \qquad\qquad -(p_1-p_5)(2u_1|u_2|^2+\overline{u_1}u_2^2)+(3p_2+p_3-2p_4)|u_2|^2u_2\\ \qquad\qquad +4p_1\operatorname{Re}(\overline{u_1}u_2)u_2+\mathcal{V}(u_1,u_2)u_2,\end{cases}\tag{1}$$

ただし, $u_j:\mathbb{R}^{1+1}\to\mathbb{C}$ は未知関数で p_j は実定数. また, $q_j\in\mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{V}(u_1,u_2)=q_1|u_1|^2+2q_2\operatorname{Re}(\overline{v_1}v_2)+q_3|u_2|^2=\overline{\begin{bmatrix}u_1 & u_2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}q_1 & q_2\\ q_2 & q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}.$$

このシステムは p_j,q_j の選び方によらず $\|u_1\|_{L^2}^2+\|u_2\|_{L^2}^2$ を保存量にもつ. また, この性質をもつようなあるクラスの方程式系の標準形たちである.

ここでは, (1) の小さい解の長時間挙動を調べるのが目的である. １次元３次の NLS は臨界であり長時間挙動に非線形項の影響が現れることはよく知られている. (1) の挙動の主要部については, 片山-迫田の一般論 [1] が適用でき, 対応する常微分方程式系

$$\begin{cases}iA_1'=(3p_2+p_3+2p_4)|A_1|^2A_1+(p_1+p_5)(2|A_1|^2A_2+A_1^2\overline{A_2})\\ \qquad +(p_2-p_3)(2A_1|A_2|^2+\overline{A_1}A_2^2)-(p_1-p_5)|A_2|^2A_2\\ \qquad -4p_1\operatorname{Re}(\overline{A_1}A_2)A_1+\mathcal{V}(A_1,A_2)A_1,\\ iA_2'=(p_1+p_5)|A_1|^2A_1+(p_2-p_3)(2|A_1|^2A_2+A_1^2\overline{A_2})\\ \qquad -(p_1-p_5)(2A_1|A_2|^2+\overline{A_1}A_2^2)+(3p_2+p_3-2p_4)|A_2|^2A_2\\ \qquad +4p_1\operatorname{Re}(\overline{A_1}A_2)A_2+\mathcal{V}(A_1,A_2)A_2,\end{cases}\tag{2}$$

のある 1-パラメータ解 $(A_1(\tau;\xi),A_2(\tau;\xi))$ を用いて

$$(t^{-\frac12}e^{i\frac{|x|^2}{2t}}A_1^{\pm}\left(\log t;\tfrac{x}{t}\right),t^{-\frac12}e^{i\frac{|x|^2}{2t}}A_2^{\pm}\left(\log t;\tfrac{x}{t}\right))$$

と与えられる. 陽な関数としてこの主要部が与えらえるためには, 上の常微分方程式系の解が具体的に書き下せるという意味で陽に解ける必要がある. [1] ではこのような方針でいくつかの挙動の例が与えられている. ここでは, (1) のいくつかのパラメータの場合を考え [1] では与えられていない新しい挙動の例をいくつか紹介する. 議論の鍵となるのは, (2) の新しい積分方法である. 解を極形式の形で書くことによって, 未知変数の２次量に関する２次の非線形方程式系に帰着させる.

参考文献

[1] S. Katayama and D. Sakoda, *Asymptotic behavior for a class of derivative nonlinear Schrödinger systems*, Partial Differ. Equ. Appl. **1** (2020), no. 3, Paper No. 12, 41, DOI 10.1007/s42985-020-00012-4. MR4336288