ある異方拡散問題に対する空間勾配の連続性

坪内 俊太郎 （つぼうち しゅんたろう）[1]
東京大学大学院 数理科学研究科
e-mail: `tsubos@ms.u-tokyo.ac.jp`

1 主結果

本講演では，特異楕円型方程式

$$-\Delta_1 u - \Delta_p u = f \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

および特異放物型方程式

$$\partial_t u - \Delta_1 u - \Delta_p u = f \quad \text{in} \quad \Omega_T = \Omega \times (0,\, T) \quad \text{with} \quad T \in (0,\, \infty) \tag{2}$$

の弱解 u の（超函数の意味での）空間勾配 $\nabla u = (\partial_{x_j} u)_j$ の連続性に関する近年の結果 [7], [8], [9] を報告する．ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界 Lipschitz 領域であり，空間次元は $n \geq 2$ とする．空間拡散作用素 Δ_s $(1 \leq s < \infty)$ は，s-Laplace 作用素 $\Delta_s u \coloneqq \nabla \cdot |\nabla u|^{s-2} \nabla u$ を表す．

楕円型方程式 (1) の弱解 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は標準的な Sobolev 空間 $W^{1,\,p}(\Omega)$ に属し，試験函数空間としては $W_0^{1,\,p}(\Omega)$ をとる．特に，方程式 (1) は $W^{-1,\,p'}(\Omega)$ の意味で捉える．ここで，$p' \coloneqq p/(p-1)$ は p の Hölder 共役指数を表す．右辺の既知函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ については，Lebesgue 空間 $L^q(\Omega)$ に属するものとする．空間勾配の連続性を示すに際して，指数 $p,\, q$ は

$$1 < p < \infty, \quad n < q \leq \infty \tag{3}$$

をみたすものとする．指数 q の条件は，古典的な Poisson 方程式を考えると最適な仮定である．方程式 (1) の弱解は次のように定義される．

定義 1.1. 函数 $u \in W^{1,\,p}(\Omega)$ が (1) の弱解であるとは，$Z \in L^\infty(\Omega;\, \mathbb{R}^n)$ が存在して，任意の $\varphi \in W_0^{1,\,p}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega (Z + |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x$$

が成立し，ほとんどいたるところの $x \in \Omega$ に対して

$$Z(x) \in \partial|\cdot|(\nabla u(x))$$

をみたすことである．ただし，$\partial|\cdot|$ は $|\cdot|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\, \infty)$ の劣微分作用素である．

定義 1.1 で注意すべき点は，$|\nabla u|^{-1} \nabla u$ の代わりに劣勾配に値をとる函数 Z を導入したことであるが，これは凸函数 $|\cdot|$ が原点で微分できないためである．特に，より緩い意味での微分にあたる劣勾配・劣微分の枠組みで，$\Delta_1 u$ を取り扱う必要がある．

放物型方程式 (2) についても定義 1.1 と同様に弱解を定義できるが，函数空間の設定を詳しく述べる必要がある．弱解 $u\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ は

$$X^p(0,\, T;\, \Omega) \coloneqq \left\{ u \in L^p(0,\, T;\, W^{1,\,p}(\Omega)) \;\middle|\; \partial_t u \in L^{p'}(0,\, T;\, W^{-1,\,p'}(\Omega)) \right\}$$

に属するものとする．特に，方程式 (2) は $L^{p'}(0,\, T;\, W^{-1,\,p'}(\Omega))$ の意味で捉えており，試験函数空間としては

$$X_0^p(0,\, T;\, \Omega) \coloneqq \left\{ u \in L^p(0,\, T;\, W_0^{1,\,p}(\Omega)) \;\middle|\; \partial_t u \in L^{p'}(0,\, T;\, W^{-1,\,p'}(\Omega)) \right\}$$

[1]本研究は JSPS 科研費 22KJ0861 の助成を受けたものである．

をとる．このようなクラスでの p-Laplace 方程式の弱解の一意存在はよく知られている（例えば，[5], [6]）．既知函数の外力項 $f\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ は $L^q(0,\,T;\,L^q(\Omega)) = L^q(\Omega_T)$ に属し，指数 $p,\,q$ は

$$\frac{2n}{n+2} < p < \infty, \quad n+2 < q \le \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \le 1 \tag{4}$$

をみたすものとする．条件 (4) のうち，1 番目と 2 番目の仮定は ∇u の連続性を考える上で「典型的な」[2] 仮定である [3, Chapters VIII–IX] が，3 番目の仮定は連続包含 $L^q(\Omega_T) \hookrightarrow L^{p'}(0,\,T;\,W^{-1,\,p'}(\Omega))$ を用いる都合で要求される技術的仮定である．条件 (4) の下で，弱解は次のように定義される．

定義 1.2. 函数 $u \in X^p(0,\,T;\,\Omega) \cap C([0,\,T];\,L^2(\Omega))$ が方程式 (2) の弱解であるとは，$Z \in L^\infty(\Omega_T;\,\mathbb{R}^n)$ が存在して，任意の $\varphi \in X_0^p(0,\,T;\,\Omega)$ に対して

$$\int_0^T \langle \partial_t u,\,\varphi \rangle_{W^{-1,\,p'}(\Omega),\,W_0^{1,\,p}(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \iint_{\Omega_T} (Z + |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{\Omega_T} f\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

が成立し，ほとんどいたるところの $(x,\,t) \in \Omega_T$ に対して

$$Z(x,\,t) \in \partial|\cdot|(\nabla u(x,\,t))$$

をみたすことである．

方程式 (1), (2) の数学解析は，$p=2$ の場合は 1970 年代の Duvaut–Lions の古典的テキスト [4] にまでさかのぼることができるが，空間勾配の連続性は長らく未解決問題であった．以下の定理 1.3–1.4 は，超函数の意味での空間勾配 $\nabla u \in L^p$ が C^0 のクラスに入ることを表しており，これまで予想されていた空間勾配の連続性を肯定的に解決するものである．

定理 1.3. 指数 $p,\,q$ が条件 (3) をみたすとする．この時，楕円型方程式 (1) の弱解 u の空間勾配 ∇u は Ω 上連続である．

定理 1.4. 指数 $p,\,q$ が条件 (4) をみたすとする．この時，放物型方程式 (2) の弱解 u の空間勾配 ∇u は Ω_T 上連続である．

なお，より強い結果として ∇u の Hölder 連続性が予想されているが，これは依然として未解決である．

2 証明の方針

定理 1.3–1.4 を示す際に問題となる点は，1-Laplace 作用素の拡散作用には特異性と退化性の両方を併せ持つことである．このような異方拡散構造により，方程式 (1)–(2) の「一様楕円・放物性」が弱解の平らな面 $\{\nabla u = 0\}$ の近くで崩れてしまうため，等方拡散構造に基づいた既存の正則性理論（例えば，Schauder 理論や De Giorgi–Nash–Moser 理論）のみでは平らな面のふちにおける解析が困難となる．

しかし，$|\nabla u| \ge \delta > 0$ という具合に勾配が退化していない場合には，方程式 (1)–(2) が適当な意味で「一様楕円・放物的」になることがわかる．そこで切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ を導入して，切り捨てられた勾配

$$\mathcal{G}_\delta(\nabla u) \coloneqq (|\nabla u| - \delta)_+ \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

の局所 Hölder 連続性を示すことが証明の鍵となる．上記のような切り捨てを施すことにより，平らな面において強く現れる異方拡散構造や非一様楕円・放物性を回避できることが重要であ

[2] ただし，$1 < p \le \frac{2n}{n+2}$ の場合でも $u \in L^p(\Omega_T)$ よりも強い可積分性があれば，∇u の連続性が期待される．この問題については，現在取り組んでいる最中である．

る．ただし，$\mathcal{G}_{\delta}(\nabla u) \in C^{0}$ の連続度評価は根本的に $\delta \in (0, 1)$ に依存しており，$\delta \to 0$ とした場合の連続度評価を定量的に得ることはできない．そのため，解 u の平らな面のふちの周りにおける ∇u の定量的な連続度評価を得ることについては，依然として困難な未解決課題である．しかし $\delta \to 0$ とすると $\mathcal{G}_{\delta}(\nabla u)$ は ∇u に一様収束するため，定性的な連続性 $\nabla u \in C^{0}$ が従い，定理の証明が完了する．

このような切り捨ての手法は，異方的な退化拡散楕円型問題の正則性に関する研究 [1, 2] で用いられている．講演者は [1] に大きく影響を受けて，楕円正則性（定理 1.3）を示し [7, 8]，更には放物正則性（定理 1.4）も示した [9]．切り捨てられた空間勾配に関する局所 Hölder 連続度評価については，De Giorgi の切り捨て法と Campanato の摂動法に基づいた古典的なアプローチにより達成される（定常問題 (1) の正則性を日本語で概説したものとして，[10] のテクニカルレポートを挙げる）．

参考文献

[1] V. Bögelein, F. Duzaar, R. Giova, and A. Passarelli di Napoli. Higher regularity in congested traffic dynamics. *Math. Ann.*, 385(3–4):1823–1878, 2023.

[2] M. Colombo, and A. Figalli. Regularity results for very degenerate elliptic equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 101(1):94–117, 2014.

[3] E. DiBenedetto. *Degenerate Parabolic Equations.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] G. Duvaut, and J.-L. Lions. *Inequalities in Mechanics and Physics.* Grundlehlen der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 219. Springer-Verlag, New York, 1976.

[5] J.-L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.* Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[6] R. E. Showalter. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, volume 49 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[7] S. Tsubouchi. Continuous differentiability of a weak solution to very singular elliptic equations involving anisotropic diffusivity. to appear in *Adv. Calc. Var.*

[8] S. Tsubouchi. A weak solution to a perturbed one-Laplace system by p-Laplacian is continuously differentiable. *Math. Ann.*, 62pp, 2022.

[9] S. Tsubouchi. Continuity of a spatial gradient of a weak solution to a very singular parabolic equation involving the one-Laplacian. arXiv:2306.06868v3, 2023.

[10] 坪内俊太郎. Continuous differentiability of weak solutions to certain very singular elliptic equations or systems involving one-Laplacian. 第 19 回数学総合若手研究集会 〜数学の交差点〜