Analyticity of solutions and its application to the Navier-Stokes equations in an end-point critical space

中里 亮介 (信州大学 工学部)[1]

1. Introduction; Navier-Stokes equations, Fourier-Herz spaces

本講演では, 次の非圧縮性粘性流体の運動を記述する非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を, 全領域 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 上で考察する:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + \operatorname{div}(u \otimes u) + \nabla p = 0, & t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{NS}$$

ただし $u = u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $p = p(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ はそれぞれ, 流体の速度ベクトル場と圧力を表す未知函数であるとし, $u_0 = u_0(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は初期流速を表す. また $\nu > 0$ は粘性係数を表し, テンソル積 $u \otimes u$ は d 次正方行列 $(u_i u_j)_{i,j}$ を用いて定義される.

臨界空間に於ける初期値問題 (NS) の時間大域適切性に関しては, Fujita-Kato [3] の臨界 Sobolev 空間 $\dot{H}_2^{-1+d/2}(\mathbb{R}^d)$ 上での研究以降, 様々な臨界空間 (例えば, $L^d(\mathbb{R}^d)$, $\dot{B}_{p,\infty}^{-1+d/p}(\mathbb{R}^d)$ $(d \leq p < \infty)$, $BMO^{-1}(\mathbb{R}^d)$ など) 上での研究成果が知られている. しかし, 端点 $p = \infty$ の場合の臨界 Besov 空間 $\dot{B}_{\infty,\sigma}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq \sigma \leq \infty)$ 上では, 解写像の初期値連続依存性が破綻するため, 初期値問題 (NS) は非適切になることが知られている.

一方で, 後述する Fourier-Herz 空間 $\widehat{\dot{B}}_{\infty,\sigma}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ 上では, 任意の $\sigma \in [1,2]$ に対し, 初期値問題 (NS) の解は時間大域適切性を満たし (cf. Cannone-Wu [1], Iwabuchi-Takada [4]), $\sigma > 2$ の場合は非適切になることが知られている (cf. [4]). 本講演では, 時間大域適切性が得られる限界のクラス $\widehat{\dot{B}}_{\infty,2}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ に焦点を当て, その上での解の正則性と長時間挙動について考察したい.

以下では, 本講演内で用いる函数空間と初期値問題 (NS) の軟解に関し, それらの定義を述べる.

定義 1.1 (*Fourier-Herz spaces*)**.** $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, \sigma \leq \infty$ とする. Fourier-Herz 空間 $\widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s = \widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s(\mathbb{R}^d)$ とそのノルム $\|\cdot\|_{\widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s}$ を以下で定義する:

$$\widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d);\, \widehat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{\widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s} < \infty \right\}, \quad \|f\|_{\widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s} := \left\| \left\{ 2^{sj} \|\phi_j * f\|_{\widehat{L}^p} \right\}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^\sigma}.$$

ただし Fourier-Lebesgue ノルム $\|\cdot\|_{\widehat{L}^p}$ を $\|f\|_{\widehat{L}^p} := \|\widehat{f}\|_{L^{p'}}$ と定義し, p' は p の Hölder 共役を表す. 函数族 $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は Littlewood-Paley の 2 進単位周波数分解とする.

定義 1.2 (*Chemin-Lerner spaces*)**.** $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, \sigma, r \leq \infty$ とし, $T \in \mathbb{R}_+$ に対して $I = (0,T)$ と定める. Fourier-Herz 空間を基調とした Chemin-Lerner 型の時空函数空間を次のように定める:

$$\widetilde{L^r(I; \widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s)} := \overline{C(I; \mathcal{S}_0)}^{\|\cdot\|_{\widetilde{L^r(I;\widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s)}}}, \quad \|f\|_{\widetilde{L^r(I;\widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s)}} := \left\| \left\{ 2^{sj} \|\phi_j * f\|_{L^r(I;\widehat{L}^p)} \right\}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^\sigma}.$$

ただし $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ は Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の部分集合であり, $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ を満たす函数全体の集合であるとする. もし $T = \infty$ と取れる場合, $\widetilde{L^r(\mathbb{R}_+; \widehat{\dot{B}}_{p,\sigma}^s)}$ と表記する.

[1]〒 380-8553 長野県長野市若里 4-17-1 信州大学 長野キャンパス 総合研究棟 (W2 棟) 6 階 602-5.
信州大学 工学部 工学基礎部門 数学教室 助教. E-mail: nakasato@shinshu-u.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号: 22K13936) の助成を受けたものである.

定義 1.3 (*Mild solution to* (NS))**.** 初期値 $u_0 = u_0(x)$ に対し, $u \in L^2(\mathbb{R}_+; \widehat{L}^\infty)$ が次の積分方程式を満たすとき, u を初期値問題 (NS) の解 (軟解) であるという:

$$u(t) = e^{t\nu\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\nu\Delta}\,\mathcal{P}_\sigma \operatorname{div}(u\otimes u)(\tau)\,d\tau \quad in\ \ L^2(\mathbb{R}_+; \widehat{L}^\infty).$$

ただし, $e^{t\nu\Delta}u_0 := \mathcal{F}^{-1}[e^{-t\nu|\xi|^2}\widehat{u}_0]$ であり, $\mathcal{P}_\sigma$ はソレノイダル空間への Helmholtz 射影作用素を表し, ベクトル場 $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対して, $\mathcal{P}_\sigma v := v + (-\Delta)^{-1}\nabla \operatorname{div} v$ と定義される.

2. Main Results; Gevrey Analyticity, Time-decay estimates

以下では, $s \in \mathbb{R}$ と $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対し, $|\nabla|^s v := \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \widehat{v}\,]$ とする. 初期値問題 (NS) に対して, 次の Gevrey 型解析性と時間減衰評価に関する結果を得た (cf. [6]).

定理 2.1 (*Global well-posedness and Gevrey analyticity*)**.** $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ の意味で $\operatorname{div} u_0 = 0$ を満たす初期値 $u_0 \in \widehat{\dot{B}}{}^{-1}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ に対して, ある十分に小さい定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, $\|u_0\|_{\widehat{\dot{B}}{}^{-1}_{\infty,2}} \le \varepsilon_0$ が成り立つと仮定する. このとき, 初期値問題 (NS) の時間大域解 u が一意的に存在し, 次を満たす:

$$u \in C([0,\infty); \widehat{\dot{B}}{}^{-1}_{\infty,2}) \cap L^2(\mathbb{R}_+; \widehat{\dot{B}}{}^{0}_{\infty,1}) \cap \widetilde{L^1(\mathbb{R}_+; \widehat{\dot{B}}{}^{1}_{\infty,2})}.$$

(*Analyticity*) 更に, ある定数 $C > 0$ が存在し, u は次の時間一様評価を満たす:

$$\|e^{\sqrt{\nu t}|\nabla|}u\|_{\widetilde{L^\infty(0,t;\widehat{\dot{B}}{}^{-1}_{\infty,2})}\cap L^2(0,t;\widehat{\dot{B}}{}^{0}_{\infty,1})\cap \widetilde{L^1(0,t;\widehat{\dot{B}}{}^{1}_{\infty,2})}} \le C\|u_0\|_{\widehat{\dot{B}}{}^{-1}_{\infty,2}} \quad for\ all\ t>0. \tag{2.1}$$

注意 2.2. $\widehat{\dot{B}}{}^{-1}_{\infty,2}(\mathbb{R}^d)$ 上での時間大域適切性については, 論文 [1, 4] 内で既に証明されている. 定理 2.1 では, [1, 4] で得られた大域解 u が $u \in L^2(\mathbb{R}_+; \widehat{\dot{B}}{}^{0}_{\infty,1})$ と Gevrey 型解析性 (2.1) を満たすことを明らかにした. 次の $\widehat{L}^p$-$\widehat{L}^1$ 減衰評価の証明では, (2.1) が本質的に重要な役割を果たす.

定理 2.3 ($\widehat{L}^p$-$\widehat{L}^1$ *decay estimates*)**.** $1 \le p \le \infty$ とする. 初期値 u_0 は定理 2.1 と同じ仮定を満たすとし, 更に $u_0 \in \widehat{\dot{B}}{}^{0}_{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ も満たすと仮定する. このとき, 初期値問題 (NS) の時間大域解 u は, 任意の $s > -d/p'$ に対して, 次の L^p-L^1 型の減衰評価を満たす:

$$\||\nabla|^s u(t)\|_{\widehat{L}^p} = O(t^{-\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{s}{2}}) \quad (t\to\infty).$$

定理 2.1 の (2.1) と定理 2.3 の応用で, Miyakawa [5] や Fujigaki-Miyakawa [2] で得られている, Refined decay estimate や軟解の漸近展開についても導出が可能である. もし時間に余裕があれば, その結果についても触れる予定である.

References

[1] Cannone, M., Wu, G., *Global well-posedness for Navier-Stokes equations in critical Fourier-Herz spaces*, Nonlinear Anal., **75** (2012) 3754–3760.

[2] Fujigaki, Y., Miyakawa, T., *Asymptotic profiles of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in the whole space*, SIAM J. Math. Anal., **33** (2001) 523–544.

[3] Fujita, H., Kato, T., *On the Navier-Stokes initial value problem. I*, Arch. Ration. Mech. Anal., **16** (1964) 269–315.

[4] Iwabuchi, T., Takada, R., *Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type*, J. Funct. Anal., **267** (2014), 1321–1337.

[5] Miyakawa, T., *Application of Hardy space techniques to the time-decay problem for incompressible Navier-Stokes flows in R^n*, Funkcial. Ekvac., **41** (1998) 383–434.

[6] Nakasato, R., *Gevrey type analyticity and asymptotic behavior of solutions to the Navier-Stokes equations in an end-point scaling critical framework*, preprint.