誘引反発混合型移流項をもつ移流拡散方程式の定数定常解の安定性

和久井洋司　(福井大工)*

$n \geq 1$における, 次の移流拡散方程式に対する初期値問題の定数定常解の安定性について考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot \big(u \nabla(\beta_1 \psi_1 - \beta_2 \psi_2) \big) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad\quad -\Delta \psi_1 + \lambda_1 \psi_1 = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad\quad -\Delta \psi_2 + \lambda_2 \psi_2 = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \qquad\quad u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{AR}$$

ここで, $\beta_1, \beta_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$であり$u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \psi_j(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,(j = 1,2)$は未知関数である. この移流拡散方程式(AR)の第二式および第三式はHelmholtz方程式であることから$\psi_j = (\lambda_j - \Delta)^{-1} u$で与えられているものとする. 移流拡散方程式は適当な枠組みにおいて解の性質を考えることにより, 質量保存則が成立する. すなわち, $u_0 \geq 0$なる$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$が適当な条件を満たせば, 対応する解$u$もほとんど至るところ$u \geq 0$となり$\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1$が成立する. こうした保存量は移流拡散方程式の解の時間大域挙動の解明に重要な役割を果たす一方, 全空間$\mathbb{R}^n$における可積分性に依拠した枠組みであることから, 方程式の構造から自然に導出される定数定常解$(u, \psi_1, \psi_2) = (A, A/\lambda_1, A/\lambda_2)$ $(A \in \mathbb{R})$を含めることができない.

本講演では定数定常解を含む枠組みとして, 時間局所解の存在性と初期値の局所的な特異性の強さの関係に着目した一様局所Lebesgue空間をもとに, 方程式(AR)の定数定常解$(u, \psi_1, \psi_2) = (A, A/\lambda_1, A/\lambda_2)$が安定となる定数$A$の閾値について述べる. 本発表は山田哲也氏(福井工高専)との共同研究に基づく.

参考文献

[1] Cygan, S., Karch, G., Krawczyk, K., Wakui, H., *Stability of constant steady states of a chemotaxis model*, J. Evol. Equ. **21** (2021), pp. 4873 – 4896

[2] Suguro, T., *Well-posedness and unconditional uniqueness of mild solutions to the Keller-Segel system in uniformly local spaces*, J. Evol. Equ. **21** (2021), pp.4599 – 4618

[3] Wakui, H., Yamada, T., *Stability of constant steady states of a attraction-repulsion Keller-Segel model*, in preparation

* e-mail: hwakui@u-fukui.ac.jp