変動指数をもつSobolev空間における埋め込みのコンパクト性について

橋詰　雅斗　(大阪大・基礎工)*

$N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を領域とする.

$$L^\infty_+(\Omega) := \left\{ q \in L^\infty(\Omega) \;\middle|\; \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q(x) \geq 1 \right\}$$

とし, $q \in L^\infty_+(\Omega)$ に対して, 変動指数Lebesgue空間を

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ 可測関数} \;\middle|\; \int_\Omega |u(x)|^{q(x)} dx < \infty \right\}$$

で定義する. この関数空間は次の $L^{q(\cdot)}(\Omega)$-ノルムによりBanach空間となる.

$$\|u\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} := \inf \left\{ \lambda > 0 \;\middle|\; \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{q(x)} dx \leq 1 \right\}$$

q が定数の場合は通常のLebesgue空間に一致する.

本講演では, $m \in \mathbb{N}$, $m < N$, $1 < p < N/m$ とし, Sobolev埋め込み

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega) \tag{1}$$

に関するコンパクト性について議論する.

まず, 有界領域における (1) のコンパクト性の結果を述べる. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界領域とし, $q \in L^\infty_+(\Omega)$ とする. また, 簡単のため $0 \in \Omega$ を仮定する. 通常のLebesgue空間への埋め込み定理からの直接的な拡張として,

$$q(x) \leq p^* := \frac{Np}{N - mp} \quad a.e.\ x \in \Omega$$

が成り立つとき, 連続埋め込み (1) が成り立ち, さらに

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} (p^* - q(x)) > 0 \tag{2}$$

が成り立つとき, この埋め込みはコンパクトとなる. より詳細な結果は, Sobolev空間の可積分指数 p も変動指数としたSobolev埋め込み $W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ に関する結果も含め, Fan-Shen-Zao [3], Harjulehto-Hästö [5], Kurata-Shioji [6], Mizuta-Ohno-Shimomura-Shioji [7] などがある. 連続埋め込み $W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ の成立条件に関する先行研究として [3, 5] があり, 一方, [6] では (1) におけるコンパクト, 非コンパクトそれぞれに関するより具体的な q の条件を, [7] ではコンパクトに関する q の条件をさらに精密にしている. 本講演では, これら先行研究でも扱われている $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} (p^* - q(x)) = 0$ の場合も含めた条件の下でコンパクト性を議論する. (2) の代わりに次を仮定する:

本講演は石渡通徳氏（大阪大学）との共同研究に基づく.

*e-mail: m.hashizume.es@osaka-u.ac.jp

任意の$r>0$に対して

$$c_r := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega\setminus B_r}(p^*-q(x))>0$$

が成り立つ.

$\lim_{r\to 0} c_r > 0$ の場合が $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega}(p^*-q(x)) > 0$ に対応し, $\lim_{r\to 0} c_r = 0$ の場合が $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega}(p^*-q(x)) = 0$ に対応する. 簡単のため$s(x) := p^*-q(x)$とし, まず次の先行研究の結果を紹介する:

定理 1 ([6, 7]) ある定数$C_0>0$が存在して

$$\lim_{r\to 0}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_r}\left[s(x)\log\frac{1}{|x|}\right]\le C_0$$

が成り立つとする. このとき, 埋め込み$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$は非コンパクト.

そして, コンパクト性に関して次の結果を得る.

定理 2 関数sに関して

$$\lim_{r\to 0}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B_r}\left[s(x)\log\frac{1}{|x|}\right]=+\infty$$

が成り立つとする. このとき, 埋め込み$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$はコンパクト.

埋め込み(1)のコンパクト性は変動指数qの$0\in\Omega$周りでのp^*への近づき方で決まり, その境となる増大度が$|\log|x||^{-1}$である, ということがわかる. 僅かではあるが, 定理2は[7]のコンパクト性の結果の改良となっている. 証明の方針としては, まず臨界Sobolev埋め込み$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$が非コンパクトであることに立ち返る. そして, その非コンパクト列がどのような関数列かを考察し, その関数列がもつ性質を用いて直接計算により証明を行う.

次に埋め込み$W^{m,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$のコンパクト性について議論する. この埋め込みに関しても, Fan-Zhao-Zhao [4], Fan [1, 2] による先行研究がある. これらの先行研究も有界領域の場合と同様$W^{m,p(\cdot)}_{rad}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$における結果が得られている.

定理の主張のために次を定義する.

$$s(x) := p^*-q(x),\quad \gamma(x) := q(x)-p\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

定理 3 関数s,γが以下の2つの条件

$$\lim_{r\to 0}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B_r}\left[s(x)\log\frac{1}{|x|}\right]=+\infty,$$
$$\lim_{R\to\infty}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^N\setminus B_R}\left[\gamma(x)\log|x|\right]=+\infty$$

をみたすとする. このとき, 埋め込み$W^{m,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$はコンパクト.

定理 4 関数s,γに関して, 次のどちらかをみたすとする:

(i) ある定数$C_0>0$が存在して

$$\lim_{r\to 0}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B_r}\left[s(x)\log\frac{1}{|x|}\right]\le C_0$$

をみたす,

(ii) ある定数$C_0 > 0$が存在して

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N\setminus B_R} [\gamma(x)\log|x|] \le C_0$$

をみたす.

このとき, 埋め込み$W^{m,p}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$は非コンパクト.

定理3,4の証明も定理1,2と同様の手法で行う. 証明では$W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$関数に関する各点評価（radial lemma）が鍵となる.

最後に, 定理 2-4 の拡張について述べる. 定理 2-4 の証明と同様の手法を用いることにより, 変動指数 Sobolev 空間における埋め込み $W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ および $W^{m,p(\cdot)}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$におけるコンパクト性, 非コンパクト性の結果も得られる. ただしこの場合, 連続埋め込みが成り立つpの条件, 特に$W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$における拡張作用素が存在するpの条件の下で議論を行う必要がある. これに関しては, [3, 5] などで得られており, その条件を使って議論を行う. $W^{m,p(\cdot)}_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^N)$のコンパクト性の証明に関しても$p$が変動指数になることによる複雑さが現れる部分がある. $W^{1,p(\cdot)}_{rad}(\mathbb{R}^N)$関数に関する radial lemma の証明の際に, 定数p, $W^{1,p}_{rad}(\mathbb{R}^N)$における radial lemma の証明法は直接は使えない. 従って, 証明の手法を改良する必要がある.

参考文献

[1] X. Fan, Boundary trace embedding theorems for variable exponent Sobolev spaces. (English summary) J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), no. 2, 1395-1412.

[2] X. Fan, Sobolev embeddings for unbounded domain with variable exponent having values across N. (English summary) Math. Inequal. Appl. 13 (2010), no.1, 123-134.

[3] X. Fan, J. Shen, D. Zhao, Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 262 (2001) 749-760.

[4] X. Fan, Y. Zhao, D. Zhao, Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$. (English summary) J. Math. Anal. Appl. 255 (2001), no.1, 333-348.

[5] P. Harjulehto, P. Hästö, Sobolev inequalities with variable exponent attaining the values 1 and n. Publ. Mat. 52:2, 2008, 347-363.

[6] K. Kurata, N. Shioji, Compact embedding from $W^{1,2}_0(\Omega)$ to $L^{q(x)}(\Omega)$ and its application to nonlinear elliptic boundary value problem with variable critical exponent, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), 1386-1394.

[7] Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura, N. Shioji, Compact embeddings for Sobolev spaces of variable exponents and existence of solutions for nonlinear elliptic problems involving the $p(x)$-Laplacian and its critical exponent. (English summary) Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 35 (2010), no.1, 115-130.