６次元藤田型方程式の有限エネルギー値を持つ解の動き

原田 潤一 (秋田大学教育文化学部)

発表日：令和７年６月１４日（土）

つぎの熱方程式を考えます。

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u \qquad \text{for } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \tag{1}$$

p が臨界指数の時, オーバン・タレンチ解を $\mathsf{Q}(x) = (1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)})^{-\frac{n-2}{2}}$ と表すことにします。発表では, つぎの二つの定理を説明します。

定理 1 (基底状態近傍の解の分類)**.** $n = 6$, $p = \frac{n+2}{n-2}$ とする。$\delta_1 > 0$ が存在して, 初期値 $u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ が

$$\|u_0 - \mathsf{Q}\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} < \delta_1 \tag{2}$$

を満たすとき, その解 $u(x,t)$ はつぎの３パターンのどれかひとつの挙動をとる。

1. $u(x,t)$ は $t = \infty$ まで定義され, つぎが成り立つ。
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{ in } \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$$
2. $u(x,t)$ は $t = \infty$ まで定義され, $\lambda_\infty > 0$ と $z_\infty \in \mathbb{R}^n$ が存在して, つぎが成り立つ。
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lambda_\infty^{-\frac{n-2}{2}} \mathsf{Q}(\tfrac{x-z_\infty}{\lambda_\infty}) \quad \text{ in } \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$$
3. ある正定数 T が存在して, 解 $u(x,t)$ は $t = T$ で有限時刻爆発を起こし, つぎが成り立つ。
$$\sup_{t\in(0,T)} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(t)\|_\infty < \infty$$

定理 2 (時間無限大で集中・バニシングする $\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ クラスの解)**.** $n = 6$, $p = \frac{n+2}{n-2}$ とする。2 つの球対称な初期値

$$u_0(x) = v_i(x) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n) \qquad (i = 1,2)$$

が存在して, 解 $u_i(x,t)$ $(i = 1,2)$ はつぎを満たす。

1. $u_1(x,t)$ の時刻無限大での集中化：C^1 級関数 $\lambda_1(t) > 0$ が存在してつぎが成り立つ。

- $\lim_{t\to\infty} \lambda_1(t) = 0$
- $\sup_{t>0} \|u_1(x,t) - \lambda_1(t)^{-\frac{n-2}{2}} \mathsf{Q}(\frac{x}{\lambda_1(t)})\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} < \delta$
- $\lim_{t\to\infty} \|u_1(x,t) - \lambda_1(t)^{-\frac{n-2}{2}} \mathsf{Q}(\frac{x}{\lambda(t)})\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} = 0$

2. $u_2(x,t)$ の時刻無限大でのバニシング化：C^1 級関数 $\lambda_2(t) > 0$ が存在してつぎが成り立つ。

- $\lim_{t\to\infty} \lambda_2(t) = \infty$
- $\sup_{t>0} \|u_2(x,t) - \lambda_2(t)^{-\frac{n-2}{2}} \mathsf{Q}(\frac{x}{\lambda_2(t)})\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} < \delta$
- $\lim_{t\to\infty} \|u_2(x,t) - \lambda_2(t)^{-\frac{n-2}{2}} \mathsf{Q}(\frac{x}{\lambda_2(t)})\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)} = 0$

定理 1 の高次元版（空間 7 次元以上）はコロット・メルル・ラファエル先生らによって既に知られています。彼らの結果との大きな違いは, 彼らは初期値のクラスを $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ を仮定しているのに対し, 私は $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ を仮定します。定理 2 で構成した解の存在性によって, 空間 6 次元の場合には, 初期値のクラスを $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ に変更してしまうと, 定理 1 は不成立になることを言っています。$\mathbb{R}^2 \to S^2$ への調和写像流方程式の写像度 2 の場合に, 同様な現象が起こることを日本数学会（2025 春）に教えていただきました。定理 2 はそれをヒントにしています。