Solvability of the Schrödinger equation with the nonlinear boundary condition in the energy space

津原　駿　(北海道大学 大学院理学研究院) *

本発表では, 非線形 Neumann 境界条件を伴う Schrödinger 方程式の以下の初期値境界値問題を, 半空間 $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ $(n \geq 2)$ 上で考察する.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0 & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\ -\partial_{x_n} u|_{x_n=0}(t,x') = \mu |u|^{q-1} u|_{x_n=0}(t,x'), & t \in \mathbb{R}, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \qquad\quad x \in \mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{1}$$

ただし $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ を未知函数, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ を初期値とする. また, $q > 1$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を定数, 空間変数を $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ と表すこととする.

半空間における非線形 Schrödinger 方程式の研究は, Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件を問わず数多く存在する. 近年, 既知の境界非斉次項だけでなく, 半空間境界上で非線形自己相互作用を伴う問題が研究されつつある. 1 次元半直線においては, Batal–Özsarı [2], Hayashi–Ogawa–Sato [3] らが, それぞれ $H^1(\mathbb{R}_+)$, $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上において問題の適切性を示した. また高次元においては, Ogawa-Sato-T. らが L^2 での適切性を示した ([5, 6, 7]). 一方, 解のエネルギーが定義できる空間として重要な H^1 空間に対しては, 発表者の知る限り高次元での適切性が示されていない. それは, 境界法方向微分によって従来の解表示が H^1 で意味を持たなくなるためであった. 本発表では, [5, 6, 7] による L^2 適切性の結果を概観したのち, H^1 適切性に関する結果と困難点を述べ, 鍵となる境界 Strichartz 評価を詳細に述べる. 以下, $H^k(\mathbb{R}^n_+)(k = 0, 1)$ を L^2 を基調とした Sobolev 空間とする. [4] を基に, (1) の解を以下の積分方程式で定義する.

定義 1　$T > 0$ とする. $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して, $u = u(t,x) : [0,T) \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ が初期値を $u_0 \in H^k(\mathbb{R}^n_+)$ とする (1) の解であるとは,

$$u(t) = e^{\frac{1}{2}it\Delta_N} u_0 + z\big[\mu |u|^{q-1} u|_{x_n=0}\big](t) \tag{2}$$

を, 函数空間 $C([0,T); H^k(\mathbb{R}^n_+)) \cap C_{x_n}(\overline{\mathbb{R}}_+; L^1_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^{n-1}))$ で満たすことと定める. ただし, $e^{\frac{1}{2}it\Delta_N}$ は 0-Neumann 境界条件下での自由 Schrödinger 発展群である (cf. [5]). また $h = h(t,x') : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}$ に対して, 境界 Duhamel 項を以下で定める.

$$z[h](t,x',x_n) := i \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi i(t-s)}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{\frac{ix_n^2}{2(t-s)}} e^{\frac{i|x'-y'|^2}{2(t-s)}} h(s,y') dy' ds. \tag{3}$$

定義 2　指数の組 (θ, r, r_n) が許容指数であるとは, 次を満たすことと定める.

$$\frac{2}{\theta} + \frac{n-1}{r} + \frac{1}{r_n} = \frac{n}{2}, \qquad 2 \leq r, r_n \leq \infty, \qquad (n, \theta, r, r_n) \neq (2, 2, \infty, \infty).$$

以下, C_b を連続かつ有界な函数全体の集合, $W^{1,p}$ を弱微分による Sobolev 空間, $H^{s,p}$ をリースポテンシャルによる Sobolev 空間とする. 初期値境界値問題 (1) に対して, 以下の通り時間局所適切性を示した.

---

* 〒060-0810 北海道札幌市北区北 10 条西 8 丁目北海道大学 大学院理学研究院 数学部門 4 号館 5 階 4-514 室
e-mail: tsuhara@math.sci.hokudai.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:25K17286, 25KJ0004) の助成を受けたものである.

定理 3（H^k 時間局所適切性） $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 指数対 $(\theta_1, q+1, \infty)$ を許容指数の組とする. また, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ と仮定する. ただし, $1/\theta_1 + 1/\theta_1' = 1, 1/(q+1) + 1/(q+1)' = 1$ を満たすとする.

(i) ($k=0$ の場合, [5, 6, 7]) もし $1 < q \le 1 + 2/n$ かつ $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ ならば, ある $T > 0$ と問題 (1) の解 u が一意に存在して以下を満たす.

$$u \in C([0,T); L^2(\mathbb{R}^n_+)) \cap L^{\theta_1}(0,T; C_{b,x_n}(\mathbb{R}_+; L^{q+1}_{x'}(\mathbb{R}^{n-1})))$$

(ii) ($k=1$ の場合) もし $q > 1 (n=2)$, $1 < q \le 1 + 1/(n-2) (n \ge 3)$ かつ $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ ならば, ある $T > 0$ と問題 (1) の解 u が一意に存在して以下を満たす.

$$\begin{aligned} u \in\ & C([0,T); H^1(\mathbb{R}^n_+)) \cap L^{\theta_1}(0,T; C_{b,x_n}(\mathbb{R}_+; W^{1,q+1}_{x'}(\mathbb{R}^{n-1}))) \\ & \cap H^{\frac{1}{2},\theta_1}(0,T; C_{b,x_n}(\mathbb{R}_+; L^{q+1}_{x'}(\mathbb{R}^{n-1}))), \quad n = 2, \\ u \in\ & C([0,T); H^1(\mathbb{R}^n_+)) \cap L^2(0,T; C_{b,x_n}(\mathbb{R}_+; W^{1,\frac{2(n-1)}{n-2}}_{x'}(\mathbb{R}^{n-1}))) \\ & \cap H^{\frac{1}{2},2}(0,T; C_{b,x_n}(\mathbb{R}_+; L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}_{x'}(\mathbb{R}^{n-1}))), \quad n \ge 3. \end{aligned}$$

注意 1 $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ならば, 保存則が成り立つ. つまり, 以下の量について, L^2 解には一つ目のみ, H^1 解には両方の量が解の全ての存在時刻で保存される:

$$M[u] \coloneqq \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}, \qquad E[u(t)] \coloneqq \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} - \frac{\mu}{q+1}\|u(t,\cdot,0)\|^{q+1}_{L^{q+1}_{x_1}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

方程式の適切性を示すために, 解の時空間積分に対する線形評価 (Strichartz 評価) と縮小写像の原理を用いる. 特に, 全空間の問題では現れない境界項を評価するために, 次の境界 Strichartz 評価を示す必要がある.

補題 4（境界 Strichartz 評価, cf. [5, 6, 7]） 指数 (θ, r, r_n), (σ, ρ, ∞) を許容指数の組, $r \le r_n$ とする. このとき, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$ と (3) で定まる $z[h]$ に対して, 以下の評価が成り立つ.

$$\big\|\langle\partial_{x'}\rangle z[h]\big\|_{L^\theta(\mathbb{R}; L^{r_n}_{x_n}(\mathbb{R}_+; L^r_{x'}(\mathbb{R}^{n-1})))} \le C\big\|\langle\partial_{x'}\rangle h\big\|_{L^{\sigma'}(\mathbb{R}; L^{\rho'}_{x'}(\mathbb{R}^{n-1}))}, \tag{4}$$

$$\big\|\partial_{x_n} z[h]\big\|_{L^\theta(\mathbb{R}; L^{r_n}_{x_n}(\mathbb{R}_+; L^r_{x'}(\mathbb{R}^{n-1})))} \le C\big\||\tau + |\xi'|^2/2|^{\frac{1}{4}}\mathcal{F}_{t,x'}[h]\big\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2_{x'}(\mathbb{R}^{n-1}))}, \tag{5}$$

$$\big\||\partial_t|^{\frac{1}{2}} z[h]\big\|_{L^\theta(\mathbb{R}; L^{r_n}_{x_n}(\mathbb{R}_+; L^r_{x'}(\mathbb{R}^{n-1})))} \le C\big\||\tau + |\xi'|^2/2|^{-\frac{1}{4}}|\tau|^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}_{t,x'}[h]\big\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2_{x'}(\mathbb{R}^{n-1}))}. \tag{6}$$

ここで, $\mathcal{F}_{t,x'}[h]$ は h の時空間 Fourier 変換である.

補題 4 を示すために, $z[h]$ の基本解表示 (3) などから分散型評価を導出する. 不等式 (4) は, $(n-1)$ 次元直線における分散型評価や半直線上の Fresnel 積分を用いて, 可積分な時間減衰を陽に導くことで得られる. 一方, 不等式 (5), (6) は, 左辺の解の微分が境界法方向の不要な重みや時間特異性を表出させるため, 容易には得られない. そこで, Audiard [1] を参考に, 法方向微分を時間微分と接方向微分に置き換える別の解表示を導入する. それにより Fourier 制限型のノルムを導出し, 評価を得る.

本発表の一部は, 小川卓克氏 (早稲田大学), 佐藤拓也氏 (愛媛大学) との共同研究に基づく.

参考文献

[1] Audiard, C., Ann. Inst. Fourier, Grenoble **69** (2019), 31-80.

[2] Batal, A., Özsarı, T., Electric. J. Differential Equations **2016** (2016), 1-20.

[3] Hayashi, N., Ogawa, T., Sato, T., J. Differential Equations **422** (2025), 355–385.

[4] Hayashi, N., Kaikina, E., I., Nonlinear Anal. **187** (2019), 279-306.

[5] Ogawa, T., Sato, T., Tsuhara, S., *The initial-boundary value problem for the Schrödinger equation with the nonlinear Neumann boundary condition on the half-plane*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **31** (2024), no. 4, Paper No. 59, 22 pp.

[6] Ogawa, T., Tsuhara, S., *Wellposedness for the nonlinear Schrödinger equation with the nonlinear boundary condition in low dimensional half spaces*, Adv. Stud. Pure Math., to appear.

[7] Tsuhara, S., *The initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation with the nonlinear Neumann boundary condition on the higher dimensional half-space*, preprint.