Sobolev 優臨界指数を持つ放物型 Hénon 方程式に対する爆発レートについて

比佐 幸太郎　(福岡大学理学部)*

2025 年 10 月 4 日

以下の Dirichlet 境界条件付き放物型 Hénon 方程式の非負値球対称解を考察する．

$$\partial_t u = \Delta u + |x|^\sigma u^p \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{E}$$

ただし，$N \geq 3$, $\sigma > 0$, $T \in (0,\infty)$，$R > 0$ に対して，$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < R\}$, かつ初期値は非負値球対称かつ滑らかとする．さらに指数 p に対して，Sobolev 優臨界，即ち，

$$p > \frac{N+2+2\sigma}{N-2} =: p_{\mathrm{S}}(\sigma)$$

という仮定を課す．この方程式は藤田型方程式 ($\sigma = 0$ の場合) と同じように，解の値が有限時刻 T で無限大に発散する，爆発という現象が起こることが知られており，それは以下のように分類される．

(I) $\displaystyle\limsup_{t \nearrow T} (T-t)^{\frac{2+\sigma}{2(p-1)}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} < \infty$ の時，Type I 爆発,

(II) (I) でない場合，Type II 爆発.

しかし，この方程式の非線形項 $|x|^\sigma u^p$ は原点においては値が 0 であるため，原点において爆発は起こりづらいと思われる．従って，以下の 2 点が疑問となり，これらについて考察するのが，本講演の主題である．

(1) 原点で爆発することが起こり得るのか？

(2) 原点で爆発する場合，その爆発レートは何か？

問題 (1) に関しては，Guo–Shimojo [1] によって $N = 3$ の場合に原点で爆発する解が構成されており，本講演においては，この条件を $N \geq 3$ かつ $p_{\mathrm{S}}(\sigma) < p < p_{\mathrm{JL}}(\sigma)$ まで緩和できたことを報告したい，ここで，$p_{\mathrm{JL}}(\sigma)$ は方程式 (E) に対する Joseph–Lundgren 指数である．

問題 (2) に関しては，以下の結果が得られた．

Theorem A

$N \geq 3$, $p_{\mathrm{S}}(\sigma) < p < p_{\mathrm{JL}}(\sigma)$ とする. さらに，u を時刻 T で爆発する (E) の非負値球対称解とする．この時，ある定数 $C > 0$ が存在して以下が成立：

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C(T-t)^{-\frac{2+\sigma}{2(p-1)}} \quad \text{for} \quad \frac{T}{2} < t < T$$

---

*e-mail: hisak@fukuoka-u.ac.jp

本講演は関 行宏 氏 (東京都立大学大学院理学研究科) との共同研究に基づく．

即ち，爆発は Type I しかあり得ないということを証明できた．藤田型方程式 ($\sigma = 0$) に対しては，Matano–Merle [2] により，同様の結果が示されており，方程式 (E) に対して，藤田型方程式の結果の対応物が得られたと言うことができる．

主結果の証明の鍵は, 2013 年に Phan によって示された, 以下の Singularity and decay estimates である．

Singularity and decay estimates (Phan [3])

ある定数 $C = C(N, p, \sigma) > 0$ が存在して以下が成立する: u を (E) の非負値球対称解とすると,

$$|x|^{\frac{\sigma}{p-1}} u(x,t) \leq C(t^{-\frac{1}{p-1}} + (T-t)^{-\frac{1}{p-1}} + |x|^{-\frac{2}{p-1}})$$

が任意の $0 < |x| < R/2$, $t \in (0, T)$ に対して成立する．

[1], [2] の手法と，この評価を組み合わせることにより，(1),(2) に対する主結果を得ることができ，本講演においてはそれを重点的に説明したい．

参考文献

[1] J.-S. Guo and M. Shimojo, Blowing up at zero points of potential for an initial boundary value problem, Commun. Pure Appl. Anal. **10** (2011), no. 1, 161–177; MR2746532

[2] H. Matano and F. Merle, On nonexistence of type II blowup for a supercritical nonlinear heat equation, Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 11, 1494–1541; MR2077706

[3] Q. H. Phan, Singularity and blow-up estimates via Liouville-type theorems for Hardy-Hénon parabolic equations, J. Evol. Equ. **13** (2013), no. 2, 411–442; MR3056310