微分型分数階非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題の適切性と非適切性

岡本　葵　（広島大学大学院先進理工系科学研究科）

本講演の内容は，加藤孝盛氏（佐賀大学），近藤俊希氏（大阪大学）との共同研究に基づく．

次の分数階非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \partial_t u + iD^\alpha u = F(u, \partial_x u, \overline{u}, \overline{\partial_x u}), \\ u|_{t=0} = \phi. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\alpha \geq 2$, $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $u = u(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ は未知関数，$\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ は既知関数である．また，D^α は

$$D^\alpha u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\alpha \widehat{u}(t,k) e^{ikx}$$

であり，$F(\zeta, \omega, \overline{\zeta}, \overline{\omega})$ $(\zeta, \omega \in \mathbb{C})$ は多項式である．

本発表では，初期値問題が適切となるための非線形項の構造条件について述べる．ここで，初期値問題が適切とは，初期値問題の解が一意に存在して，初期値から解への対応が連続であることを意味する．

定理 1（[3, 5]）　$\alpha \geq 2$, $s \in \mathbb{R}$ は

$$s > s_*(\alpha) := \max\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{5}{2}\right)$$

を満たすとする．このとき，初期値問題 (1) が $H^s(\mathbb{T})$ において適切であるための必要十分条件は，任意の $\psi \in H^s(\mathbb{T})$ に対して，

$$\int_{\mathbb{T}} \mathrm{Im}\, \frac{\partial F}{\partial \omega}(\psi(x), \partial_x \psi(x), \overline{\psi(x)}, \overline{\partial_x \psi(x)}) dx = 0 \tag{2}$$

が成り立つことである．

定理 1 における構造条件 (2) の例を挙げる．

- 非線形項 $u\partial_x u$, $\overline{u}\partial_x u$ それぞれでは，初期値問題は非適切である．一方，その和 $u\partial_x u + \overline{u}\partial_x u$ では，初期値問題は適切である．
- 非線形項 $(\partial_x u)^2$ では初期値問題は適切である．この非線形項は，(2) の積分により悪い部分が消える．

構造条件 (2) は，$\alpha \geq 2$ や非線形における溝畑条件に相当する．なお，[1] にて，$\alpha = 2$ のとき，(2) は解が存在するための十分条件であることが示されている．また，非線形項 $u^k\partial_x u$ $(k \in \mathbb{N})$ では，解写像が連続にならないことも示されている．さらに，[4] にて，同じ非線形項をもつ分数階非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題の非適切性が示されている．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ では，非線形項の次数が 3 次以上のときには，Sobolev 空間において適切性が成り立つことが知られている ([2])．一方，周期境界条件においては，分散性が強い場合や非線形項の次数が高い場合であっても，適切性が成り立つためには非線形項に構造条件が必要である．このように，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{T}$ では適切性の成立において状況が全く異なる．このような違いは，$\mathbb{T}$ における分散性が弱いことに起因する．

参考文献

[1] H. Chihara, *The initial value problem for Schrödinger equations on the torus*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. **15**, 789–820.

[2] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire **10** (1993), no. 3, 255–288.

[3] T. K. Kato, T. Kondo, M. Okamoto, *Well- and Ill-posedness of the Cauchy problem for derivative fractional nonlinear Schrödinger equations on the torus*, arXiv:2508.11866.

[4] T. Kondo, M. Okamoto, *Norm inflation for a higher-order nonlinear Schrödinger equation with a derivative on the circle*, Partial Differ. Equ. Appl. **6** (2025), no. 2, Paper No. 11, 14 pp.

[5] T. Kondo, M. Okamoto, *Well- and ill-posedness of the Cauchy problem for semilinear Schrödinger equations on the torus*, to appear in Funkcialaj Ekvacioj.