

L^p 粘性解の ABPKT 最大値原理の 精密評価について

小池茂昭 (早稲田大学)

完全非線形楕円型・放物型方程式を考える.

$$\begin{aligned} F(x, Du, D^2u) &= f(x) && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u_t + F(t, x, Du, D^2u) &= f(t, x) && \text{in } (0, T) \times \Omega \end{aligned}$$

そのため, 次のような extremal(端点) 方程式を解析することが本質的である. 但し, 一様楕円定数 $0 < \lambda \leq \Lambda$ を固定して, \mathcal{P}^- は次で与える.

$$\mathcal{P}^-(X) := \min\{-\text{trace}(AX) \mid \lambda I \leq A \leq \Lambda I, A \in \mathbb{S}^n\}$$

ここで, \mathbb{S}^n は, 実対称 $n \times n$ 行列全体とする.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-(D^2u) - \mu(x)|Du| &= f(x) && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u_t + \mathcal{P}^-(D^2u) - \mu(t, x)|Du| &= f(t, x) && \text{in } (0, T) \times \Omega \end{aligned}$$

1989年に Caffarelli[1] は, $\mu \equiv 0$, $f \in C(\Omega) \cap L^n(\Omega)$ の場合に, Aleksandrov-Bakelman-Pucci の (ABP と略す) 最大値原理が完全非線形楕円型偏微分方程式の正則性理論に本質的な道具であることが明らかにした. 1992年に, $\mu \equiv 0$, $f^{n+1} \in C \cap L^{n+1}$ の場合に, L. Wang[8] がその放物型版の研究を始めた.

1996年に, Caffarelli-Crandall-Kocan-Świąch[2] で, $\mu \in L^\infty$, $f \in L^n$ の場合に, 適用するため, L^p 粘性解の概念を導入し, 完全非線形楕円型方程式の適用範囲を広げた. その, 放物型版も 1994年に, $\mu \in L^\infty$, $f \in L^{n+1}$ の場合に, Crandall-Kocan-Świąch[3] によって一般化された.

2007年から, A. Świąch と $\mu \in L^q$ ($q > n$), $f \in L^n$ で ABP 最大値原理 [4] や Harnack 不等式 [5] など, 共同研究を進めてきた. 2022年には, [6] で楕円型の場合に, $f, \mu \in L^n$ の時, ABP 最大値原理を非斉次項上接集合 $\Gamma[u]$ 上での積分量による評価を得た.

$$\Gamma[u] := \{x \in \Omega \mid \text{There is } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ such that } u(y) \leq u(x) + \langle \xi, y - x \rangle \text{ for } y \in \Omega\}$$

これにより, [1] の Calderon-Zygmund 評価を経ずに, L^p 粘性解が殆ど至る所で二階微分可能で方程式を満たすことがわかる.

本講演では, 非斉次項の上接集合上 $\hat{\Gamma}[u]$ での積分量による評価を放物型の場合に関して紹介する.

$$\hat{\Gamma}[u] := \left\{ (t, x) \in (0, T) \times \Omega \mid \begin{array}{l} \text{There exists } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ such that } u(s, y) \leq \\ u(t, x) + \langle \xi, y - x \rangle \text{ for } (s, y) \in (0, t] \times \Omega \end{array} \right\}$$

幾つか, 放物型独特の評価が必要になる.

放物型の ABP 最大値原理は, ABP に, 放物型で貢献した N.V. Krylov と K. Tso[7] を加えた略称である.

本研究は, Świąch との共同研究である.

参考文献

- [1] L.A. Caffarelli, Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, Ann. of Math. (2), **130** (1) (1989), 189-213.
- [2] L.A. Caffarelli, M.G. Crandall, M. Kocan and A. Świąch, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, Comm. Pure Appl. Math., **49** (4) (1996), 365-398.
- [3] M.G. Crandall, M. Kocan and A. Świąch, L^p -theory for fully nonlinear uniformly parabolic equations, Comm. Partial Differential Equations, **25** (11-12), (2000), 1997-2053.
- [4] S. Koike and A. Świąch, Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method, Math. Ann., **339** (2) (2007), 461-484.
- [5] S. Koike and A. Świąch, Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDEs with unbounded ingredients, J. Math. Soc. Japan, **61** (3) (2009), 723-755.
- [6] S. Koike and A. Świąch, Aleksandrov-Bakelman-Pucci maximum principle for L^p -viscosity solutions of equations with unbounded terms, J. Math. Pures Appl. (9), **168** (2022), 192-212.
- [7] K. Tso, On an Aleksandrov-Bakel'man type maximum principle for second-order parabolic equations, Comm. Partial Differential Equations **10** (5) (1985), 543-553.
- [8] L. Wang, On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations. I, Comm. Pure Appl. Math., **45** (1) (1992), 27-76.