非線形4階シュレディンガー方程式に対する基底状態未満の群不変解の散乱

駒田 洸一　(立命館大学 立命館グローバル・イノベーション研究機構)

1. Introduction

次の非線形4階シュレディンガー方程式を考える.

$$i\partial_t u - \Delta^2 u + |u|^{p-1}u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

ただし, $u = u(t,x)$ は複素数値の未知函数であり, p は

$$1 + \tfrac{8}{d} < p < \begin{cases} \infty & (1 \le d \le 4), \\ 1 + \frac{8}{d-4} & (d \ge 5) \end{cases} \tag{2}$$

を満たすとする. (1) の解 u に対して, 次の質量とエネルギーが保存量となる.

$$\begin{aligned} M(u(t)) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx, \\ E(u(t)) &:= \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta u(t,x)|^2 dx - \tfrac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

各 $\omega > 0$ に対して, (1) は $u(t,x) = e^{i\omega t}\phi(x)$ の形の定在波解を持つ. ここで, ϕ は

$$-\omega\phi - \Delta^2\phi + |\phi|^{p-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{3}$$

の解である. (3) の非零解の中で作用汎函数 $S_\omega(\phi) := E(\phi) + \frac{\omega}{2}M(\phi)$ が最小であるものを基底状態と呼び, 以下では Q_ω と表記する. p が (2) を満たす場合には,

$$S_\omega(Q_\omega) = \inf\{S_\omega(\phi) \mid \phi \in H^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}, K(\phi) = 0\}$$

が成り立つ. ここで, $K(\phi)$ は次で定義されるヴィリアル汎函数である.

$$K(\phi) := 2\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta\phi(x)|^2 dx - \tfrac{d(p-1)}{2(p+1)}\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^{p+1} dx.$$

(1) の解 u に対して, 次のヴィリアル等式が成り立つ.

$$\tfrac{d}{dt}\Im\int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}(t,x) x \cdot \nabla u(t,x) dx = 2K(u(t)).$$

$d \ge 2$ かつ初期値 u_0 が球対称である場合について, [1, 2] において, $S_\omega(u_0) < S_\omega(Q_\omega)$ かつ $K(u_0) \ge 0$ ならば解が散乱することが示されている. 通常の2階の非線形シュレディンガー方程式 (NLS) に対しては, 散乱について類似の結果が初期値が球対称でない場合でも得られている. 球対称性の制限は NLS のガリレイ不変性を使って取り除かれているが, (1) に対してはガリレイ不変性が成り立たないため, $d = 1$ の場合や初期値が非球対称な場合では未解決であった. 本研究では, (1) に対する [1, 2] の結果における球対称性の制限を群不変性へ緩和することを考える.

2. Group-invariance

$O(d)$ は $d\times d$ 直交行列全体の集合とする. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times O(d)$ の部分群 G を考える. ただし, 以下で扱う部分群 G は常に, $(\theta_1,\mathcal{G}_1),(\theta_2,\mathcal{G}_2)\in G$, $\mathcal{G}_1=\mathcal{G}_2$ ならば $\theta_1=\theta_2$ が成り立っていると仮定する. すなわち, 各直交行列 $\mathcal{G}$ 対して θ は一意に定まるので, 以下では G の元とその直交行列成分を区別せずに $\mathcal{G}$ と表記する.

定義 (群不変性)**.** 函数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ に対して, $\mathcal{G}=(\theta,\mathcal{G})\in G$ による作用を $\mathcal{G}f(x):=e^{-i\theta}f(\mathcal{G}^{-1}x)$ で定める. 全ての $\mathcal{G}\in G$ に対して $\mathcal{G}f=f$ である時, f は G 不変であるという.

例として, $d\geq 2$ での球対称性は $G_{\mathrm{rad}}:=\{0\}\times O(d)$ の場合に対応する. また, $d=1$ での偶対称性と奇対称性はそれぞれ $G_{\mathrm{even}}:=\{(0,1),(0,-1)\}$, $G_{\mathrm{odd}}:=\{(0,1),(\pi,-1)\}$ の場合に対応する.

(1) は G の作用に関して不変である. 従って, 解の一意性より, 初期値 $u_0\in H^2(\mathbb{R}^d)$ が G 不変であるならば, 各時刻 t における対応する (1) の解 $u(t)$ も G 不変となる.

3. Main result

定理 1. $d\geq 1$, p は (2) を満たすとする. また, G は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times O(d)$ の部分群であり,

$$\inf_{|x|=1}\#Gx=\inf_{|x|=1}\#\{\mathcal{G}x\mid\mathcal{G}=(\theta,\mathcal{G})\in G\}\geq 4^{\frac{2}{p-1}}\tag{4}$$

を満たすとする. $u_0\in H^2(\mathbb{R}^d)$ が G 不変であり,

$$\text{ある } \omega>0 \text{ に対して } S_\omega(u_0)<S_\omega(Q_\omega) \text{ かつ } K(u_0)\geq 0\tag{5}$$

を満たすならば, u_0 を初期値とする (1) の時間大域的な一意解 $u\in C(\mathbb{R},H^2(\mathbb{R}^d))$ が存在し, さらに u は散乱する. すなわち, $\phi^\pm\in H^2(\mathbb{R}^d)$ が存在して,

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|u(t)-e^{-it\Delta^2}\phi^\pm\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}=0.$$

注意 1. $d\geq 2$ の時, $\inf_{|x|=1}\#G_{\mathrm{rad}}x=\infty$.

注意 2. $d=1$ の時, (2) より $p>9$ であり, $\inf_{|x|=1}\#G_{\mathrm{even}}x=\inf_{|x|=1}\#G_{\mathrm{odd}}x=2>4^{2/(p-1)}$. 従って, 定理 1 は $d=1$ かつ初期値が偶対称や奇対称である場合を含む.

4. Proof sketch

保存則と基底状態 Q_ω の変分的特徴付けより, (5) を満たす初期値 u_0 に対して (1) の時間大域解 u が存在し, $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}<\infty$ が成立する. さらに, $u_0\neq 0$ ならば $\inf_{t\in\mathbb{R}}K(u(t))>0$ が得られる. 以下では, u が散乱することの証明の概略を述べる.

補題 1. $d\geq 1$, p は (2) を満たすとする. (1) の時間大域解 $u\in C(\mathbb{R},H^2(\mathbb{R}^d))$ に対して

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}<\infty,\quad \|u\|_{X(\mathbb{R})}<\infty$$

が成り立つならば, u は散乱する. ここで, $I\subset\mathbb{R}$ に対して

$$\|u\|_{X(I)}:=\|u\|_{L_t^{q_1}L_x^r(I\times\mathbb{R}^d)},\quad q_1=\frac{4(p-1)(p+1)}{8-(d-4)(p-1)},\quad r=p+1.$$

ヴィリアルが正の G 不変解が散乱する作用の閾値を次で定める．

$$L^*_{G,\omega} := \sup \left\{ L \in [0,\infty) \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in C(I, H^2(\mathbb{R}^d)) : G \text{ 不変な (1) の解}, \\ S_\omega(u) \le L,\ \inf_{t\in I} K(u(t)) > 0 \\ \quad \Longrightarrow \|u\|_{X(I)} < \infty \end{array} \right\}.$$

また, $L^*_\omega := L^*_{G_{\mathrm{id}},\omega}$ とする．ここで, $G_{\mathrm{id}} = \{(0, \mathcal{I}_d)\}$ ($\mathcal{I}_d$ は $d \times d$ の単位行列) である．補題 1 より, 定理 1 を証明するためには, 全ての (4) を満たす部分群 G と全ての $\omega > 0$ に対して, $L^*_{G,\omega} \ge S_\omega(Q_\omega)$ を示せばよい．

証明では, [3, 4] における部分的結果を用いる．$m_{G,\omega}$ を次で定める．

$$m_{G,\omega} := \inf_{|x|=1} (\#Gx) L^*_{G_x,\omega}, \quad G_x := \{\mathcal{G} \in G \mid \mathcal{G}x = x\}.$$

定理 2 ([3, 4])**.** $d \ge 1$, p は (2) を満たすとする．G は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times O(d)$ の部分群とする．全ての $\omega > 0$ に対して, $L^*_{G,\omega} < m_{G,\omega}$ ならば $L^*_{G,\omega} \ge S_\omega(Q_\omega)$.

定理 2 は凝集コンパクト性の原理と背理法を用いた方法によって証明される．仮定 $L^*_{G,\omega} < m_{G,\omega}$ は, 背理法のターゲットとなる解の空間平行移動によるコンパクト性の崩れを除外するために必要となっている．しかし, 与えられた部分群 G に対してこの仮定が満たされるかどうかを確かめることは困難である．そこで, 仮定が成り立たない場合を考え, 次の定理 3 と (4) を用いることで, $L^*_{G,\omega} \ge S_\omega(Q_\omega)$ を示す．

定理 3. $d \ge 1$, p は (2) を満たすとする．全ての $\omega > 0$ に対して $L^*_\omega > (\frac{1}{4})^{\frac{2}{p-1}} S_\omega(Q_\omega)$.

$d \ge 5$ かつ $p = 1 + 8/d$ である場合の (1) に対して, 定理 3 と類似の結果が [5] で得られている．定理 3 は, [5] における議論を修正することで証明できる．

定理 1 の証明. 定理 2 より, $L^*_{G,\omega} < m_{G,\omega}$ ならば $L^*_{G,\omega} \ge S_\omega(Q_\omega)$. 一方で, $L^*_{G,\omega} \ge m_{G,\omega}$ の場合, 任意の $x \ne 0$ に対して $L^*_{G_x,\omega} \ge L^*_\omega$ なので, 定理 3 と (4) より,

$$L^*_{G,\omega} \ge \left(\inf_{|x|=1} \#Gx \right) L^*_\omega > S_\omega(Q_\omega).$$

従って, いずれの場合でも $L^*_{G,\omega} \ge S_\omega(Q_\omega)$ が成り立つ． □

参考文献

[1] V. D. Dinh, *Dynamics of radial solutions for the focusing fourth-order nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinearity **34** (2021), 776–821.

[2] Q. Guo, *Scattering for the focusing L^2-supercritical and $\dot{H}^2$-subcritical biharmonic NLS equations*, Comm. Partial Differential Equations **41** (2016), 185–207.

[3] K. Komada and S. Masaki, *Scattering of solutions with group invariance for the fourth-order nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinearity **37** (2024), 085003 (38pp).

[4] K. Komada and S. Masaki, *Scattering for the focusing, L^2-supercritical fourth-order NLS in one dimension*, Discrete Contin. Dynam. Syst. **45** (2010), 480–510.

[5] B. Pausader and S. Shao, *The mass-critical fourth-order Schrödinger equation in high dimensions*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **7** (2010), 651–705.