

# Riemann-Liouville 微分を含む境界値問題の正値解の存在性

田中敏 (東北大学大学院理学研究科)

本講演は Inbo Sim 氏 (University of Ulsan) との共同研究 (arXiv:2501.05810) に基づくものである。

次の境界値問題

$$(1) \quad D_{0+}^{\alpha} u + h(t)f(u) = 0, \quad 0 < t < 1; \quad u(0) = u(1) = 0$$

を考える。ここで、 $D_{0+}^{\alpha}$  は  $\alpha \in (1, 2]$  階の Riemann-Liouville 微分作用素

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{(2-\alpha)-1} u(s) ds \right), & 1 < \alpha < 2, \\ u''(t), & \alpha = 2 \end{cases}$$

であり、 $\Gamma$  はガンマ関数である。特に断らない限り、以下、 $\alpha \in (1, 2]$ ,  $h \in C[0, 1]$ ,  $h(t) > 0$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $f \in C[0, \infty)$ ,  $f(s) > 0$  ( $s > 0$ ) を仮定する。

$\alpha = 2$  のときの問題

$$(2) \quad u'' + h(t)f(u) = 0, \quad 0 < t < 1; \quad u(0) = u(1) = 0$$

の正値解の存在性について多くの研究があり、それは、 $f(s)/s$  の挙動と、Dirichlet 0 境界値条件のもとでの作用素  $-\frac{1}{h(t)} \frac{d^2}{dt^2}$  の第 1 固有値との関係に密接に関わっていることが知られている。本講演では、問題 (1) についても同様の特性があることを示す。

Krein-Rutman の定理より、次が導かれる。

**命題 1.** 次を満たす一意な  $\lambda_1(\alpha) > 0$  が存在性する: 固有値問題

$$(3) \quad D_{0+}^{\alpha} \phi + \lambda h(t)\phi = 0, \quad 0 < t < 1; \quad \phi(0) = \phi(1) = 0$$

は  $\lambda = \lambda_1(\alpha)$  のとき、また、そのときに限って、正値解をもつ。さらに、 $\lambda < \lambda_1(\alpha)$  のとき、問題 (3) は非自明解をもたない。

**定理 2.** ある定数  $s_0 > 0$  に対して、次のどちらか一方が成立することを仮定する:

$$(4) \quad \frac{f(s)}{s} > \lambda_1(\alpha), \quad 0 < s < s_0; \quad \lambda_1(\alpha) > \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s};$$

$$(5) \quad \frac{f(s)}{s} < \lambda_1(\alpha), \quad 0 < s < s_0; \quad \lambda_1(\alpha) < \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s}.$$

そのとき、問題 (1) は少なくとも一つの正値解をもつ。

$\alpha = 2$  の場合に、定理 2 と同様の結果が del Pino-Manásevich (1991), Erbe (2000), Kong (2007), Naito-Tanaka (2004, 2008) らによって得られている。

条件 (4), (5) の前半の不等式は、それぞれ  $\liminf_{s \rightarrow 0^+} f(s)/s > \lambda_1(\alpha)$ ,  $\limsup_{s \rightarrow 0^+} f(s)/s < \lambda_1(\alpha)$  ならば成り立つ。その場合の正値解の存在は、Benmezai-Chentout-Henderson (2019) の結果から示すことができる。

定理 2 は次の意味で精密な結果になっている。

**定理 3.** 次のどちらか一方の成立を仮定する:

$$\frac{f(s)}{s} > \lambda_1(\alpha), \quad s > 0; \quad \frac{f(s)}{s} < \lambda_1(\alpha), \quad s > 0.$$

そのとき、問題 (1) は正値解をもたない。

Benmezai-Chentout-Henderson (2019) の結果から,  $\inf_{s>0} f(s)/s > \lambda_1(\alpha)$  または  $\sup_{s>0} f(s)/s < \lambda_1(\alpha)$  ならば, 問題 (1) は正値解をもたないことを示すことができる.

$\alpha = 2$  の場合,  $f(s)/s$  が狭義単調減少であるならば, 問題 (1) の正値解は高々 1 個であることは, 古くからよく知られている (Picard (1908), Urysohn (1924)). 次のように,  $1 < \alpha < 2$  の場合も, それは成立する.

**定理 4.** 区間  $(0, \infty)$  において,  $f(s)$  は狭義単調増加であり,  $f(s)/s$  は狭義単調減少であるとする. そのとき,

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} > \lambda_1(\alpha) > \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s}$$

ならば, 問題 (1) は一意的な正値解をもつ.

$\alpha = 2$  の場合,  $f(s)/s$  が単調でなくて正値解が 2 個以上存在するという結果もある.

$f(s)/s$  が増加の場合, 正値解の一意性のためには  $h$  にも条件を課す必要がある.

**定理 5.**  $h \in C^1[0, 1]$  とし,

$$(7) \quad -\frac{2}{t} \leq \frac{h'(t)}{h(t)} \leq \frac{2}{1-t}, \quad t \in (0, 1)$$

の成立を仮定する. さらに,  $f \in C^1[0, \infty)$ ,

$$(8) \quad \left(\frac{f(s)}{s}\right)' > 0 \quad s > 0; \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1(2) < \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s},$$

かつある定数  $p > 0$  に対して,  $\limsup_{s \rightarrow \infty} s^{-p} f(s) < \infty$  の成立を仮定する. そのとき, ある  $\alpha_1 \in (1, 2)$  が存在して,  $\alpha \in (\alpha_1, 2]$  ならば, 問題 (1) は一意的な正値解をもつ.

Kwong (1990) は  $\alpha = 2$  のときの定理 5 を示しており, 定理 5 の証明ではその結果を利用している. 定理 4 とは違って, 定理 5 において, 条件 (7) のような仮定は必要である. 実際, 次の結果が成り立つ.

**定理 6.**  $l > 1, p > 1$  は  $(p-1)l \geq 4$  を満たす定数とする. そのとき, ある  $\delta > 0$  と  $\alpha_1 \in (1, 2)$  が存在して, もし,  $\alpha \in (\alpha_1, 2]$  ならば, 次の問題

$$(9) \quad D_{0+}^\alpha u + \left|t - \frac{1}{2} + \delta\right|^l u^p = 0, \quad 0 < t < 1; \quad u(0) = u(1) = 0.$$

は少なくとも三つの正値解をもつ.

$\alpha = 2, \delta = 0$  の場合の問題 (9) の方程式は, いわゆる Hénon 方程式であり, 定理 6 の証明では Hénon 方程式に対する Tanaka (2013) の結果を使用している.

以上の結果の証明では次の Green 関数が使用される.

**命題 7** (Bai-Lü (2005)).  $g \in C[0, 1]$  とする. そのとき,

$$(10) \quad -D_{0+}^\alpha v = g(t), \quad 0 < t < 1; \quad v(0) = v(1) = 0$$

は

$$v(t) = \int_0^1 G(t, s, \alpha) g(s) ds, \quad t \in [0, 1]$$

と同値である. ここで,  $G(t, s, \alpha)$  は次で定義される関数である:

$$G(t, s, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} (t(1-s))^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (t(1-s))^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$