# 実効的双曲型作用素の初期値問題に関する Ivriiの予想

西谷達雄　大阪大学

於　熊本大学　2026/6/20

## 1　双曲型作用素とは？　初期値問題の適切性

$$\begin{cases} Pu = D_t^m u + \Sigma_{j=0}^{m-1}\Sigma_{|\alpha|+j\le m} a_{j,\alpha}(t,x) D_x^\alpha D_t^j u = 0, \;\; t \ge 0, \\ D_t^j u(0,x) = u_j(x), \quad j = 0,\dots,m-1. \end{cases} \tag{1}$$

$x = (x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $D_x = (D_{x_1},\dots,D_{x_n})$, $D_{x_j} = -i\partial/\partial x_j$.

$^\exists\delta > 0$, $^\exists U$, ($x = 0$ の近傍) $^\forall u_j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し，(1) を満す $u(t,x) \in C^m([0,\delta)\times U)$ が一意に存在するとき，初期値問題 (1) は $C^\infty$ 適切という．初期値問題が $C^\infty$ 適切となるのが双曲型作用素であり，直感的には情報を時間未来に伝達する作用素である．この情報は $p(t,x,\tau,\xi) = \tau^m + \Sigma_{j=0}^{m-1}\Sigma_{|\alpha|+j=m} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha\tau^j$ ($p$ は $P$ の主シンボル) の Hamilton 方程式

$$\frac{d}{ds}(X,\Xi) = (\frac{\partial p}{\partial \Xi}, -\frac{\partial p}{\partial X}), \;\; X = (t,x), \; \Xi = (\tau,\xi)$$

の解軌道に沿って伝わる．

- $\rho$ を危点とする．$p$ が $\Xi$ について斉次なら $\nabla p(\rho) = 0 \Longrightarrow p(\rho) = 0$.
- $\nabla p(X,\Xi) = 0 \Longrightarrow p(X,\Xi) = \partial p(X,\Xi)/\partial\tau = 0$ より $\tau$ ($p(t,x,\tau,\xi) = 0$ の $\tau$ に関する根，特性根という) は多重根である．逆は一般には不成立.
- 情報は特性多様体 $\{p = 0\}$ の外では伝わらない．$p \ne 0$ とすると，粗くいって，そこでは $P$ に逆があるので解は初期値によらず滑らかになる.

## 2　Lax-Mizohata の定理

**Theorem 1** (Lax-Mizohata)**.** 初期値問題が適切ならば，$\exists\delta' > 0, \exists U'$

$$p(t,x,\tau,\xi) = 0 \Longrightarrow \tau(\text{特性根}) \in \mathbb{R}, \;\; ^\forall(t,x) \in [0,\delta')\times U', \; ^\forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

**Proposition 1.** $p(0,0,\tau,\xi) = 0$ が $\xi = (1,0,\dots,0)$ で $\mu$ 個の実根と $m-\mu \ge 1$ 個の非実根を持つとする．$I$ を原点を含む $\mathbb{R}$ の開区間とする．初期値問題 $Pu = 0$, $D_t^j u(0,x) = 0$, $0 \le j \le \mu-1$, $D_t^\mu u(0,x) = g(x_1)$ が原点の近傍で $C^m$ 解を持たないような $g \in C^\infty(I)$ の集合は $C^\infty(I)$ の中で稠密である.

係数を実解析的とすると Cauchy-Kowalevsky の定理より，特性根の虚実に関係なく，実解析的な初期値に対しては $C^m$ 解 (実解析解) が存在する.

## 3 背景, 多重特性根を持つ双曲型方程式の研究 (1950 年代〜)

簡単な例：$Pu = \partial_t^2 u = 0, p = \tau^2,\ \ u(0,x) = \phi(x),\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) \Longrightarrow u(t,x) = \phi(x) + t\psi(x)$. 一方，$Pu = \partial_t^2 u + i\partial_x u = 0,\ u(0,x) = \phi(x),\ \partial_t u(0,x) = 0$ は一般の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ については解けない．$\hat{u}(t,\xi)$: $x$ に関する Fourier 変換．解は $\hat{u} = (e^{\sqrt{\xi}t} + e^{-\sqrt{\xi}t})\hat{\phi}(\xi)/2$
$\Longrightarrow \hat{\phi}(\xi)/2 = e^{-\sqrt{\xi}t}(1 + e^{-2\sqrt{\xi}t})^{-1}\hat{u}(t,\xi) \Longrightarrow \hat{\phi}(\xi) \lesssim e^{-\sqrt{\xi}t}$ $(\xi > 0)$.

初期値問題が適切となるために低階の満たすべき条件 (Levi 条件) の研究.

Ivrii の登場 (学位論文)

$\Downarrow$ Ivrii の 1972 年の速報論文

任意の低階項に対して初期値問題が $C^\infty$ 適切である $\Longrightarrow$ 特性多様体のすべての危点において，ハミルトン写像 (基本行列) がゼロでない実の固有値の対を持つ (証明は Ivrii and Petkov(1974)).

- Ivrii(1975): 主シンボルが各危点の近傍で滑らかな 2 つの実のシンボルの積に書ける $\Longrightarrow$ 任意の低階項に対して初期値問題が $C^\infty$ 適切.
- 「任意の低階に対して初期値問題が $C^\infty$ 適切であるためには各危点でハミルトン写像が 0 でない実の固有値の対をもつことが必要十分である」と予想．この予想が，実効的双曲型作用素 (effectively hyperbolic operator) という用語の由来.

## 4 実効的双曲型作用素の定義と初期値問題に関する Ivrii 予想

$p$ の危点 $\rho = (\bar{X}, \bar{\Xi})$ で Hamilton 方程式を線形化する.

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial p/\partial \Xi \\ -\partial p/\partial X \end{bmatrix} = \nabla^\sigma p \quad \overset{\rho\text{で線形化}}{\Longrightarrow} \quad \frac{d}{ds}\begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix} = 2F_p(\rho)\begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix}$$

$$F_p(\rho) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \partial^2 p(\rho)/\partial X\partial\Xi & \partial^2 p(\rho)/\partial\Xi\partial\Xi \\ -\partial^2 p(\rho)/\partial X\partial X & -\partial^2 p(\rho)/\partial\Xi\partial X \end{bmatrix} \text{(Hamilton 行列)}.$$

定義：$p = 0$ の危点 $\rho = (\bar{X}, \bar{\Xi})$ が 実効的双曲型 (effectively hyperbolic) とは，ハミルトン写像 $F_p(\rho)$ が一組の非零の実固有値 $\pm\lambda, (\lambda \neq 0)$ を持つこと．作用素 $P$ が実効的双曲型とは，すべての危点が実効的双曲型であること.

- $p$ の特性根がすべて実のとき $F_p(\rho)$ ($\rho$ は $p$ の危点) の 0 以外の固有値は (存在すれば) $\pm\lambda$, $\pm i\mu_j$ $(\lambda, \mu_j > 0)$ であり，これらは単純固有値.
- 0 固有値に対してはサイズ 4 の Jordan ブロックが現れる場合もある.

**Ivrii 予想**：任意の低階項に対する Cauchy 問題が $C^\infty$ 適切であるための必要十分条件は，特性根がすべて実で，かつ特性多様体のすべての危点において，そのハミルトン写像が非零の実固有値の対を持つことである.

双曲性は単なる代数的条件ではなく，Hamilton 流の力学的性質として理解されるべきである.

## 5　実効的双曲性が十分であること

**Theorem 2.** (2) を仮定．$\{p=0\}$ の任意の危点 $(0,0,\tau,\xi)$, $|(\tau,\xi)|\neq 0$ は実効的双曲型とする．このとき任意の低階 ( 係数は原点の近傍で $C^\infty$) に対し，$\delta>0$, $U(x=0$ の近傍) があって，任意の $u_j(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し (1) をみたす $u(t,x)\in C^\infty([0,\delta)\times U)$ が存在する．また $u(t,x)\in C^m([0,\delta)\times U)$ が $Pu=0$, $\partial_t^j u(0,x)=0$, $0\leq j\leq m-1$ を $[0,\delta)\times U$ で満たすなら，原点の近傍 $V$ があって $V\cap\{t\geq 0\}$ で $u=0$.

注意：危点が存在しなければ $P$ は主要型で (狭義双曲型か Tricomi 型) で初期値問題は任意の低階項に対して $C^\infty$ 適切で regularity loss はない (Hörmander の教科書 XXIII 章に詳しい取り扱い).

## 6　2 重特性根の場合 (1980 年代)，最初の大きな進展

**Lemma 1.** $p(t,x,\tau,\xi)=0$ の根は $^\forall(t,x)\in V((\bar{t},\bar{x})$ の近傍), $^\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ に対し実とする．$\bar{\tau}$ が $p(\bar{t},\bar{x},\tau,\bar{\xi})=0$ の重複根なら $\nabla p(\bar{t},\bar{x},\bar{\tau},\bar{\xi})=0$.
$\bar{\tau}$ が重複度 3 以上の根なら $\nabla^2 p(\bar{t},\bar{x},\bar{\tau},\bar{\xi})=0(\Longrightarrow F_p=O)$.

仮定：$^\exists\delta_i>0$, $^\exists U$ $(x=0$ の近傍) s.t. $^\forall(t,x)\in(-\delta_1,\delta_2)\times U$, $^\forall\xi\in\mathbb{R}^n$ で $p(t,x,\tau,\xi)=0$ $(\xi\neq 0)$ の根は実 $\Longrightarrow$ $([0,\delta_2)\times U)\times\mathbb{R}^n$ 上の
危点が実効的双曲型ならそれは 2 重特性根. $\Longrightarrow$ 2 階の作用素に帰着．この場合は 1980 年代までに，予想は肯定的に解決.

- Ivrii 自身が用いた「発展作用素の作用素冪を用いる方法」を発展させたアプローチ (Iwasaki)
- 擬微分作用素の重み付きエネルギー法 (N)
- 特異性の伝播を用いる方法 (有限次元を除いた可解性のみ) (Melrose)

## 7　最終的な解決：3 重特性根の場合

**Lemma 2.** $^\forall(t,x,\xi)\in([0,\delta')\times U')\times\mathbb{R}^n$ に対し $p(t,x,\tau,\xi)=0$ の根はすべて実とする．$\bar{\tau}$ が $p(\bar{t},\bar{x},\tau,\bar{\xi})=0$, $(\bar{t},\bar{x})\in([0,\delta')\times U')$ の重複度 4 以上の根なら $\nabla^2 p(\bar{t},\bar{x},\bar{\tau},\bar{\xi})=0$ $(\Longrightarrow F_p=O)$.

Lemma より危点が実効的双曲型なら 2 重または 3 重特性根である．高々3 重特性根を持つ実効的双曲型作用素の場合に $C^\infty$ 適切性を示す $\Longrightarrow$Ivrii の予想の完全解決

- 本質的に 3 階の作用素に帰着される.
- 危点 $(\bar{t},\bar{x},\bar{\tau},\bar{\xi})$ が実効的双曲型でかつ $\bar{\tau}$ が 3 重特性根なら $\bar{t}=0$ で，さらに $t<0$ で必ず非実の特性根を持つ (2 重特性根の場合にも起り得る).
- regularity loss があるので超局所的エネルギー評価を通常の単位分解で寄せ集めることはできない (2 重特性根の場合も同様).

## 8　3 階の実効的双曲型作用素と例

$$P = D_t^3 + \Sigma_{j=1}^3 a_j(t,x,D)\langle D\rangle^j D_t^{3-j}, \quad \langle D\rangle = \sqrt{1+|D|^2}.$$

$a_1(t,x,D)=0$ と仮定できる．主シンボルは

$$p(t,x,\tau,\xi) = \tau^3 - a(t,x,\xi)\langle\xi\rangle^2\tau + b(t,x,\xi)\langle\xi\rangle^3$$

仮定：$\begin{cases} \Delta = 4a(t,x,\xi)^3 - 27b(t,x,\xi)^2 \geq 0, \quad (t,x,\xi)\in[0,T)\times U\times\mathbb{R}^n \\ \text{任意の危点 } (0,0,\tau,\xi),\ |(\tau,\xi)|\neq 0 \text{ で } F_p \text{ は非零の実固有値.} \end{cases}$

以下 $(0,0,\tau,\xi)$ は危点で $\tau$ は 3 重特性根とする $\Longrightarrow \tau=0$.
危点 $(0,0,0,\bar\xi)$ が実効的双曲型 $\Longleftrightarrow \partial_t a(0,0,0,\bar\xi)\neq 0 \Longrightarrow a = e(t,x,\xi)(t+\alpha(x,\xi))$, $e>0$, $\alpha\geq 0$.

例：$p = (\tau^2 - t|\xi|^2)\tau = (\text{Tricomi})\times\tau, \quad \Delta(p) = 4t^3,$
$\tilde p = \tau^3 - (t+\alpha^2(x))\xi^2\tau + (t^m/2 - t)\alpha(x)\xi^3, \quad \alpha(0)=0$
ここで $\Delta(\tilde p) = (t-2\alpha^2)^2(4t+\alpha^2) + 27t^{m+1}\alpha^2(1-t^{m-1}/4)$, $\Delta(\tilde p)>0$ for $0<t\leq 1$ ($\Longrightarrow 0<t\leq 1$ で狭義双曲型).
$t=2\alpha^2$ のとき $\Delta(\tilde p) = 27\cdot 2^{m+1}\alpha^{2(m+2)}(1-2^{m-3}\alpha^{2(m-1)}) = 27\cdot t^{m+2}(1-t^{m-1}/4)/2$.

## 9　証明のアイデア (対称化行列の対角化)

$$P = D_t^3 - (a(t,x,D) + e\langle D\rangle^{-1})\langle D\rangle^2 D_t + b(t,x,D)\langle D\rangle^3 + e\langle D\rangle D_t$$

$a(t,x,D) + e\langle D\rangle^{-1} \to a(t,x,D)$ と書く $\to a = e(t+\alpha+\langle\xi\rangle^{-1})$. $U = {}^t(\langle D\rangle^2 u, \langle D\rangle D_t u, D_t^2 u)$ とおくと $Pu=f \Longrightarrow D_t U = A(t,x,D)\langle D\rangle U + B(t,x,D)U + F$

$$A(t,x,\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & a & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t,x,\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

$$S(t,x,\xi) = \begin{bmatrix} a^2 & 3b & -a \\ 3b & 2a & 0 \\ -a & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\Longleftarrow p \text{ と } \partial p/\partial\tau \text{ の Bézout 行列})$$

$S$ は正定符号対称行列 ($\det S = \Delta(p)$, $|\xi|\to\infty$ で退化) で $SA$ は対称. $T^{-1}ST = \Lambda$ (対角行列). $V = \mathrm{op}(T^{-1})U$ とおくと

$$\partial_t V = i\tilde A(t,x,D)\langle D\rangle V + i\tilde B(t,x,D)V, \quad \tilde A = T^{-1}AT, \ \tilde B = T^{-1}BT - T^{-1}D_tT$$

$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ $(0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ で $\Lambda\tilde A$ は対称.

$$\Delta/a \lesssim \lambda_1 \lesssim a^2, \quad \lambda_2 \simeq a, \quad \lambda_3 \simeq 1, \quad (t\geq 0) \qquad (\star)$$

$a = e(t+\alpha+\langle\xi\rangle^{-1})$ と $\Delta = 4a^3 - 27b^2 \geq 0 \Longrightarrow \Delta \approx t$ の 3 次多項式 $\Longrightarrow \Delta/a \approx t$ の 2 次多項式.

## 10 Weight の選び方

$\rho = \alpha + \langle\xi\rangle^{-1}$ とする $(a = e(t+\rho))$.

$\Delta \approx t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = (t-\nu)((t+(\nu+a_1)/2)^2 - D)$, $\nu =$ 最小の実根.

$(\nu + a_1)/2 < {}^\exists c_1\rho \Longrightarrow |\nu - \nu_j| > {}^\exists c_2\rho$ ($\nu_j$, $j = 1, 2$ は $\Delta = 0$ の他の 2 根)

$$\Longrightarrow \begin{cases} \psi := -\chi\left(\dfrac{\nu + a_1}{2c_1\rho}\right)\dfrac{\nu + a_1}{2}, & \chi(s) = 1, s \leq 0, \chi(s) = 0, s \geq 1, \\ \Delta/(t+\rho) \geq {}^\exists c \min\{t^2, (t-\psi)^2\} & (t \geq 0) \end{cases}$$

$\omega^2 = (t - \psi(x,\xi))^2 + \rho\langle\xi\rangle^{-1}$ と定義する.

$$\Delta/a \gtrsim \min\{t^2, \omega^2\}, \quad |\partial_t\Delta|/\Delta \lesssim 1/t + 1/\omega =: \kappa, \quad (t \geq 0) \qquad (\star\star)$$

$\phi = \omega + t - \psi$ $(t \geq 0)$ とする. $\phi^{-N}$ の変化は

$\langle\xi\rangle^{2N}(1+\alpha\langle\xi\rangle)^{-N}(t < \psi) \to \langle\xi\rangle^{N}(1+\alpha\langle\xi\rangle)^{-N/2}(t \approx \psi) \to c > 0$ $(t > \psi)$.

$w = t\phi$ とおくと $\partial_t w^{-N} = -N\big(1/t + 1/\omega\big)w^{-N} = -N\kappa w^{-N}$.

$$(\star), (\star\star) \Longrightarrow |\partial_t\lambda_j| \lesssim \kappa\lambda_j, \;\; 1 \lesssim \kappa a, \;\; \lambda_i^{1/2}\lambda_j^{-1/2} \lesssim a^{(j-i)/2} \quad (t \geq 0).$$

## 11 Weighted エネルギーとシンボルレベルでの計算例

$$\text{weighted energy: } \mathcal{E}(u) = e^{-\theta t}(\mathrm{op}(\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})V, \mathrm{op}(w^{-N})V)$$

$$= e^{-\theta t}\sum_{j=1}^{3}(\mathrm{op}(\lambda_j)\mathrm{op}(w^{-N})V_j, \mathrm{op}(w^{-N})V_j) \;\; (\theta > 0),$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \Longrightarrow -2Ne^{-\theta t}\mathsf{Re}(\mathrm{op}(\kappa\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})V, \mathrm{op}(w^{-N})V)$$
$$+e^{-\theta t}(\mathrm{op}(\partial_t\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})V, \mathrm{op}(w^{-N})V)$$
$$+2e^{-\theta t}\mathsf{Re}(\mathrm{op}(\Lambda)\mathrm{op}(w^{-N})(i\tilde{A}\langle D\rangle V + i\tilde{B}V), \mathrm{op}(w^{-N})V).$$

$\mathrm{op}(w^{-N})V = W$ として

$$|\partial_t\lambda_j| \lesssim \kappa\lambda_j \Longrightarrow |((\partial_t\Lambda)W, W)| \lesssim ((\kappa\Lambda)W, W),$$
$$\Lambda\tilde{A} \;\; \text{対称} \Longrightarrow |(i\Lambda\tilde{A}\langle D\rangle W, W)| \lesssim \|W\|^2,$$
$$\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}), \quad |(\Lambda\tilde{B}W, W)| = |\Sigma\lambda_i\tilde{b}_{ij}W_j \cdot \bar{W}_i|$$
$$= \left|\Sigma\tilde{b}_{ij}\lambda_i^{1/2}\lambda_j^{-1/2}\kappa^{-1}(\kappa^{1/2}\lambda_j^{1/2}W_j)\cdot(\kappa^{1/2}\lambda_i^{1/2}\bar{W}_i)\right| \;\; (|\tilde{b}_{ij}a^{(j-i)/2}| \lesssim a^{-1})$$
$$\lesssim \Sigma a^{-1}\kappa^{-1}((\kappa\Lambda)W, W) \lesssim ((\kappa\Lambda)W, W).$$