

2次元優臨界半線形楕円型方程式の球対称爆発解の無限集中・振動現象について

内免大輔 (室蘭工業大学)

1 序

本講演では以下の円盤領域における半線形楕円型偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題を考える。

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & u > 0 \quad \text{in } D, \\ u = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases} \quad (\text{P})$$

ここで、 $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$, $f \in C^1([0, \infty))$ は非負値関数, $\lambda > 0$ はパラメーターとする。本講演では非線形項 $f(u)$ が無限遠方で2次元領域における優臨界増大度を持つ場合,

$$f(u) \sim e^{u^p} \quad (p > 2) \quad \text{または} \quad f(u) \sim \exp(\exp(\cdots(\exp(u^m)))) \quad (m > 0)$$

を考える。ただし、後者は指数関数の有限回の合成によって得られる関数である。このような優臨界非線形項の下では、一般に方程式 (P) は偏微分方程式解析の主要な道具の一つである変分法的アプローチを許容しない。このことが原因で、この場合の方程式の解構造についてはいまだ未知の部分が多い。これに対し、本講演では (P) の持つスケール構造に着目した爆発解析的アプローチによる解析結果を与える。

(P) のような優臨界型問題の先行研究については、まず高次元領域における諸研究が挙げられる。例えば、古典的な Joseph-Lundgren[9] の結果や近年の Miyamoto [15][16], Miyamoto-Naito[17] による一般化された非線形項に対する解析結果がある。最近では Figalli-Zhang[6] によって凸領域における解析も行われている。一方で2次元領域においては、Atkinson-Peletier[2] や McLeod-McLeod[14] による常微分方程式的なアプローチによる解析以来、大きな進展がなかったようである。これに対し、最近になって (P) の球対称特異解の解析が Fujishima-Ioku-Ruf-Terraneo[7] によって、爆発解の集中現象に対する解析が講演者 [19][20] によって、さらに分岐図の解析が Kumagai[11] によって行われており、(P) の解構造についての理解が進んでいる。(より最近の結果として [12] や [10] も挙げられる。)

本講演では、講演者による Trudinger-Moser 型非線形項 ($f(u) \sim e^{u^p}$ ($p > 2$)) に対する先行研究 [19][20] の拡張として、一般化優臨界増大度を持つ方程式 (P) に対する解析結果 ([21][22]) を与える。主結果として、爆発解の最大点のまわりに質量集中の無限列が生じることを示す。ここで各集中部分の漸近的概形、質量、および位置 (収束の速さや高さ) は明示的な極限方程式と質量漸化式系により特徴づけることができる。これに基づいて爆発解のグラフの形状の精密な漸近公式を導出することにより、爆発解が特異解のまわりを無限回振動することを示すことができる。このことから、分岐図の無限振動や無限個解の存在など、(P) が優臨界問題特有の複雑な解構造を持つことが証明される。本講演では、前述の結果の核心である、爆発解の無限集中現象に対する記述を与える。以下、そのために必要な一般化優臨界条件、質量漸化式系、および集中概形の無限列について述べる。

2 一般化優臨界条件, 質量漸化式系, および集中概形の無限列

本講演では非線形項 f に対し, 以下に定める一般化優臨界条件を課す。つまり $g(u) = \log f(u)$ とおき, ある $q \in [1, 2)$ および $p \in (2, \infty]$ に対し,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g'(t)^2}{g(t)g''(t)} = q$$

かつ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tg'(t)}{g(t)} = p$$

が成立するとする。このような定式化ははじめ Dupaigne-Farina[5] の論文で用いられており, これに関連するいくつかの一般化条件は前述の優臨界問題の諸研究でも用いられている。この条件の下で, $1/p + 1/q = 1$ が成立し, 条件 $q > 1$ は $g(u)$ がべき型増大度 u^p ($p > 2$), $q = 1$ は指数型 (またはそれより大きい) 増大度を持つ場合に対応することが分かる。ここでは記述を省略するが, 以下の主定理では上記条件に加えいくつかの技術的条件を課すことにする。詳細は [21][22] を参照のこと。以下ではこれらの条件を合わせて仮定 (H) と呼ぶ。

次に, 質量集中の無限列を特徴づける質量漸化式系を与える。上記の条件 (H) に対応し, $q \in [1, 2)$ と $p \in (2, \infty]$ は $1/p + 1/q = 1$ を満たす定数とする。さらに, $a_1 = 2$, $\delta_1 = 1$, および $\eta_1 = 1$ と定める。このとき, 数列 $\{a_k\} \subset (0, 2]$ と $\{\delta_k\}, \{\eta_k\} \subset (0, 1]$ を以下の漸化式系によって定義する。まず $q \in (1, 2)$ のとき, それらは各 $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{cases} \frac{2p}{2+a_k} \left(1 - \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\right) - 1 + \left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\right)^p = 0, & \delta_{k+1} < \delta_k, \\ a_{k+1} = 2 - \left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\right)^{p-1} (2+a_k), \end{cases} \quad (A_q)$$

および $\eta_k = \delta_k^p$ を満たすものとする。このとき, 各数列は well-defined であり, $\{a_k\}$ と $\{\delta_k\}$ は単調減少で 0 に収束し, $\{a_k\}$ の無限級数は無限大に発散することが分かる。続いて $q = 1$ のとき, 同数列を各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\delta_k = 1$,

$$\begin{cases} \frac{2}{2+a_k} \log \frac{\eta_k}{\eta_{k+1}} - 1 + \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} = 0, & \eta_{k+1} < \eta_k, \\ a_{k+1} = 2 - \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} (2+a_k), \end{cases} \quad (A_1)$$

によって定める。この場合も各数列は well-defined であり, $\{a_k\}$ と $\{\eta_k\}$ は単調減少かつ極限值 0 を持ち, $\{a_k\}$ の無限級数は無限大に発散することが示される。(A_q) は初めに McLeod-McLeod[14] による大きい解に対する “bouncing process” の解析を通して発見され, 後に講演者 [19] による無限集中現象に対する解析においても見出されている。一方で, (A₁) は講演者の先行研究 [20] において, (A_q) の $q \downarrow 1$ における極限漸化式系として導出されている。以下で示す通り, どちらの場合も $\{a_k\}$ は各集中部分の漸近概形や質量, $\{\delta_k\}$ と $\{\eta_k\}$ はその高さを決定する数列である。ここで, 各 $q \in [1, 2)$ に対して定まる $\delta_k = \delta_k(q)$ ($k \in \mathbb{N}$) は, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\delta_k(q) \rightarrow \delta_k(1)^- = 1^-$ ($q \rightarrow 1^+$) を満たすことに注意する。これは, 各集中が生じる高さが $q > 1$ が 1 に近づくにつれて最大値に限りなく近づくことを示唆する。

最後に、各集中部分の漸近形の無限列を定める。上の通り正の数 q, p と、それにより定まる数列 $\{a_k\}$ をとる。このとき、各 $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$U_k(r) = \log \frac{2a_k^2 b_k}{r^{2-a_k}(1+b_k r^{a_k})^2} \quad (r > 0) \quad (2.1)$$

と定める。ただし、 $b_k = (\sqrt{2}/a_k)^{a_k}$ とする。このとき、各 $k \in \mathbb{N}$ に対し、 U_k は全空間における球対称 Liouville 方程式

$$\begin{cases} -U_k'' - \frac{1}{r}U_k' = e^{U_k} & \text{in } (0, \infty), \\ U_k(a_k/\sqrt{2}) = 0, \quad (a_k/\sqrt{2})U_k'(a_k/\sqrt{2}) = 2, \end{cases} \quad (2.2)$$

を満たしており、直接計算により

$$\int_0^\infty e^{U_k} r dr = 2a_k \quad (2.3)$$

が確かめられる。ここで、 U_k は各 $k > 1$ に対し原点で特異性を持つことに注意する。

3 主結果

以上の表記に基づき、本講演の主定理を述べる。その為、まず Gidas-Ni-Nirenberg[8] の結果により、(P) の解は球対称かつ動径方向に対し単調減少であることに注意する。特に、解は原点で最大値をとる。このことから、(P) は $u = u(r)$ ($r \in [0, 1]$) に対する常微分方程式

$$\begin{cases} -u'' - \frac{1}{r}u' = \lambda f(u), & u > 0 \text{ in } (0, 1), \\ u(0) = \mu > 0, \quad u'(0) = 0 = u(1), \end{cases} \quad (3.1)$$

に帰着される。以下では $\{(\lambda_n, \mu_n, u_n)\} \subset (0, \infty) \times (0, \infty) \times C^2([0, 1])$ は (3.1) の解の列とする。つまり $(\lambda, \mu, u) = (\lambda_n, \mu_n, u_n)$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、(3.1) を満たすものとする。本講演の主定理は以下の通りである。

主定理. f は仮定 (H) を満たし、 $\{(\lambda_n, \mu_n, u_n)\}$ は (3.1) の解の列で $\mu_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすものとする。このとき、必要ならば部分列をとることで、 $[0, 1]$ 上の無限数列の無限族 $\{(r_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{(\rho_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}\}_{k \in \mathbb{N}}$, および $\{(\bar{\rho}_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ がとれて、各 $k \in \mathbb{N}$ に対し、 $0 \leq \bar{\rho}_{k,n} < r_{k,n} < \rho_{k,n} < \bar{\rho}_{k+1,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) かつ極限 $n \rightarrow \infty$ において $\bar{\rho}_{k,n}/r_{k,n} \rightarrow 0$, $\rho_{k,n}/r_{k,n} \rightarrow \infty$, $u_n(\bar{\rho}_{k,n})/\mu_n \rightarrow \delta_k$, $u_n(r_{k,n})/\mu_n \rightarrow \delta_k$, $u_n(\rho_{k,n})/\mu_n \rightarrow \delta_k$, かつ

$$\lambda_n r_{k,n}^2 f'(u_n(r_{k,n})) \rightarrow \frac{a_k^2}{2}$$

を満たし、さらにスケールパラメーターの列 $(\gamma_{k,n})$ とスケール関数列 $(\tilde{u}_{k,n})$ を

$$\lambda_n f'(u_n(r_{k,n})) \gamma_{k,n}^2 = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

および

$$\tilde{u}_{k,n}(r) = g'(u_n(r_{k,n}))(u_n(\gamma_{k,n} r) - u_n(r_{k,n})) \quad (r \in [0, 1/\gamma_{k,n}], \quad n \in \mathbb{N})$$

によって定めると、 $n \rightarrow \infty$ の極限において、 $\gamma_{k,n} \rightarrow 0$ および

$$\|\tilde{u}_{k,n} - U_k\|_{C^2([\bar{\rho}_{k,n}/\gamma_{k,n}, \rho_{k,n}/\gamma_{k,n}])} \rightarrow 0$$

が成立する。ただし、 $k = 1$ では $\bar{\rho}_{1,n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) ととった。さらに、 $q = 1$ のときは、 $(r_n) = (r_{k,n}), (\rho_{k,n}), (\bar{\rho}_{k,n})$ に対し

$$u_n(r_n) = \mu_n - \left(\log \frac{1}{\eta_k} + o(1) \right) \frac{g(\mu_n)}{g'(\mu_n)} \quad (3.2)$$

が成立する。最後に、各 $k \in \mathbb{N}$ に対し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{\rho}_{k,n}}^{\rho_{k,n}} \lambda_n f'(u_n) r dr = 2a_k \quad (3.3)$$

かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\rho_{k,n}}^{\bar{\rho}_{k+1,n}} \lambda_n f'(u_n) r dr = 0 \quad (3.4)$$

が成立する。特に、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \lambda_n f'(u_n) r dr = \infty \quad (3.5)$$

を得る。

本主定理において $[\bar{\rho}_{k,n}, \rho_{k,n}]$ は k 番目の集中部分の出現区間を表し、 $(r_{k,n})$ はその質量中心と呼ぶべきものである。出現区間の高さは最大値 μ_n を δ_k 倍したものと得られる。ただし、 $q = 1$ のときはより精密な (3.2) の表示が得られる。 $(\tilde{u}_{k,n})$ は $[\bar{\rho}_{k,n}, \rho_{k,n}]$ 上に現れる集中部分を $(r_{k,n})$ まわりにパラメータ列 $(\gamma_{k,n})$ を通してスケールした関数列であり、これは上で定義した漸近概形 U_k に収束する。最後に、(3.3) と (3.4) で与えられるように、区間 $[\bar{\rho}_{k,n}, \rho_{k,n}]$ 上で爆発解の質量は U_k の質量に収束をし、2つの隣り合う集中部分の間では非自明な質量は現れない。さらに、数列 $\{a_k\}$ の無限級数が発散することに注意すると質量集中の無限列の出現によって (3.5) のように全質量は発散することが分かる。これまでの臨界や劣臨界問題に対する諸研究では、爆発解の質量集中部分は高々有限個であり、全質量も高々有界であることが標準的な観察結果であったことから考えて、本主定理は優臨界型特有の著しい集中現象を既述するものと言える。主定理の証明には、Ogawa-Suzuki[23] や Adimurthi-Druet[1] によって発見されたスケール則と Druet[3] による各点評価法を優臨界型に拡張するとともに、Malchiodi-Martinazzi[13] による球対称解に対する爆発解析法や講演者による球対称符号変化解の解析 [18] で用いられた Green 型恒等式を組み合わせた議論を展開する。序の最後で述べたように、本主定理に基づいて得られる爆発解のグラフの漸近公式と [7] や [10] で構成された特異解の漸近挙動を比較することで、爆発解がそれらの特異解のまわりを無限回振動していることが示される。このことから、解の分岐図の無限振動や無限個解の存在など、(P) が優臨界問題特有の解構造を有することを証明することができる [22]。

参考文献

- [1] Adimurthi and O. Druet, Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality. Comm. in PDE. **29** (2004), 295–322
- [2] F.V. Atkinson and L.A. Peletier, Ground states and Dirichlet problems for $-\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^2$. Arch. Rational Mech. Anal. **96** (1986), 103–127 J. Differential Equations 193 (2003) 280–306
- [3] O. Druet, Multibumps analysis in dimension 2: quantification of blow-up levels. Duke Math. J. **132** (2006), 217–269

- [4] O. Druet and P.D.Thizy, Multi-bump analysis for Trudinger-Moser nonlinearities. I. Quantification and location of concentration points. *J. Eur. Math. Soc.* **22** (2020), 4025–4096
- [5] L. Dupaigne and A. Farina, Stable solutions of $-\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^N$. *J. Eur. Math. Soc.* **12** (2010), 855–882
- [6] A. Figalli and Y.R.Y. Zhang, Uniform boundedness for finite Morse index solutions to supercritical semilinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **77**, (2024), 3–36
- [7] Y. Fujishima, N. Ioku, B. Ruf, and E. Terraneo, Singular solutions of semilinear elliptic equations with exponential nonlinearities in 2-dimensions, *J. Funct. Anal.* **289** (2025), Paper No. 110922
- [8] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209–243
- [9] D.D. Joseph and T.S. Lundgren, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive source. *Arch. Rational Mech. Anal.* **49** (1973), 241–269
- [10] H. Kikuchi and K. Kumagai, Singular solutions and bifurcation diagram of semilinear elliptic equations with general nonlinearity in two dimensions, arXiv:2511.08961.
- [11] K. Kumagai, Bifurcation diagrams of semilinear elliptic equations for supercritical nonlinearities in two dimensions, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* **32** (2025), Paper No. 38
- [12] K. Kumagai, Uniformly boundedness of finite Morse index solutions to semilinear elliptic equations with rapidly growing nonlinearities in two dimensions, *Nonlinear Anal.* 269 (2026), Paper No. 114105
- [13] A. Malchiodi and L. Martinazzi, Critical points of the Moser-Trudinger functional on a disk. *J. Eur. Math. Soc.* **16** (2014), 893–908
- [14] B. McLeod and K. McLeod, The critical Sobolev exponent in two dimensions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **109** (1988), 1–15
- [15] Y. Miyamoto, Classification of bifurcation diagrams for elliptic equations with exponential growth in a ball. *Ann. Mat. Pura Appl.* **94** (2015), 931–952
- [16] Y. Miyamoto, A limit equation and bifurcation diagrams of semilinear elliptic equations with general supercritical growth. *J. Differential Equations* **264** (2018) 2684–2707
- [17] Y. Miyamoto and Y. Naito, A bifurcation diagram of solutions to semilinear elliptic equations with general supercritical growth, *J. Differential Equations* **406** (2024), 318–337
- [18] D. Naimen, Concentration profile, energy, and weak limits of radial solutions to semilinear elliptic equations with Trudinger-Moser critical nonlinearities. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **60** (2021), Paper No. 66
- [19] D. Naimen, Concentration and oscillation analysis of positive solutions to semilinear elliptic equations with exponential growth in a disc. I, *J. Math. Pures Appl.* **206** (2026) Paper No. 103834
- [20] D. Naimen, Concentration and oscillation analysis of positive solutions to semilinear elliptic equations with exponential growth in a disc. II, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, <https://doi.org/10.1017/prm.2025.10042> (2025), FirstView articles
- [21] D. Naimen, Infinite concentration and oscillation estimates for supercritical semilinear elliptic equations in discs. I. arXiv:2507.01475
- [22] D. Naimen, Infinite concentration and oscillation estimates for supercritical semilinear elliptic equations in discs. II. arXiv:2507.01475

tions in discs. II. [arXiv:2507.01488](#)

- [23] T. Ogawa and T. Suzuki, Nonlinear elliptic equations with critical growth related to the Trudinger inequality. *Asym. Anal.* **12** (1996), 25–40