

Linear stability of line solitary waves in two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattices

山崎 陽平 (山口大学大学院創成科学研究科)

1 導入

次の 2 次元 Fermi–Pasta–Ulam 格子方程式

(2FPU) $\partial_t^2 q = (1 - e^{-\partial_m})V'((e^{\partial_m} - 1)q) + (1 - e^{-\partial_n})V'((e^{\partial_n} - 1)q)$, $q : \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 について考える. ここで, $e^{\partial_m}q(m, n) = q(m + 1, n)$, $e^{\partial_n}q(m, n) = q(m, n + 1)$, $V \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
 $V(0) = V'(0) = 0$, $V''(0) = 1$, $V'''(0) = 2$ とする. (2FPU) は保存量

$$H(p, q) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(V((e^{\partial_m} - 1)q) + V((e^{\partial_n} - 1)q) + \frac{1}{2}|p|^2 \right).$$

を持つ. 重み付きソボレフ空間を

$$H_a^1(\mathbb{R}) = \{u \mid e^{ax}u(x) \in H^1(\mathbb{R})\}.$$

で定める. Friesecke–Pego により, 1 次元 Fermi–Pasta–Ulam 格子方程式の進行波の存在とその漸近安定性に関する以下の結果が示されている.

命題 1 (Friesecke–Pego [FP1, FP2]). ある $a_0, \varepsilon_0, C_0 > 0$ と $r_c \in C^1((1, 1 + \frac{\varepsilon_0^2}{24}), H_{a_0}^1(\mathbb{R}) \cap H_{-a_0}^1(\mathbb{R}))$ が存在して, $1 < c < 1 + \frac{\varepsilon_0^2}{24}$ に対し, 平行移動を除いて単峰型関数として, r_c は

$$c^2 \partial_x^2 r_c = (e^{\partial_x} - 2 + e^{-\partial_x})V'(r_c)$$

の一意な解かつ正值偶関数であり, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して, $c_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon^2}{24}$ とおくと

$$\left\| \varepsilon^{-2} r_{c_\varepsilon} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) - \phi_1 \right\|_{H^1} \leq C_0 \varepsilon^2$$

をみたす. ここで, $\phi_1(x) = \frac{1}{8} \cosh^{-2}(\frac{x}{2})$. さらに, $\vec{Q}_c(t, m) = {}^t((e^{\partial_x} - 1)^{-1} r_c(m - ct), -c(e^{\partial_x} - 1)^{-1} \partial_x r_c(m - ct))$ は

$$(1\text{FPU}) \quad \partial_t^2 q = (1 - e^{-\partial_m})V'((e^{\partial_m} - 1)q), \quad q : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R},$$

の漸近安定な進行波解である.

2 主結果

本発表では, $\vec{Q}_c$ を (2FPU) の線状進行波とみなして, 線状進行波 $\vec{Q}_c$ の線形安定性について得られた結果を報告する. 線状進行波 $\vec{Q}_c$ 周りの (2FPU) の線形化方程式は

$$(L) \quad \partial_t \vec{q} = \mathbb{L}_\varepsilon(t) \vec{q}, \quad \vec{q} = {}^t(q, p) : \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

で与えられる. ここで, $c_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon^2}{24}$, $R_c(t, m, n) = r_c(m - ct)$, 掛け算作用 $\mathcal{M}_f g = fg$ を用いて、

$$\mathbb{L}_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1 - e^{-\partial_m})\mathcal{M}_{V''(R_{c_\varepsilon}(t))}(e^{\partial_m} - 1) + (1 - e^{-\partial_n})(e^{\partial_n} - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

と表す.

実数 a について, (2FPU) の重み付きエネルギー空間とノルムを

$$X_a = \{ {}^t(u, v) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \mid \| {}^t(u, v) \|_{X_a} < \infty \},$$

$$\| {}^t(u, v) \|_{X_a} = \left(\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{2am} (|(e^{\partial_m} - 1)u|^2 + |(e^{\partial_n} - 1)u|^2 + |v|^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\| {}^t(u, v) \|_{X_{a, \infty}} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2am} (|(e^{\partial_m} - 1)u|^2 + |(e^{\partial_n} - 1)u|^2 + |v|^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

で定義する. さらに, 線形化方程式 (L) の初期時刻を s , 初期値を $\vec{q}_0 \in X_{\varepsilon a}$ とする初期値問題の解を $\Psi(t, s)\vec{q}_0$ とする. このとき, 次の主結果を得た.

定理 2 (Y.). ある $a_*, \varepsilon_* > 0$ が存在して, $0 < a < a_*$ に対し, ある $\eta_a, C_a > 0$ が存在して, $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ と $t > s$, $\vec{q}_0 \in X_{\varepsilon a}$ に対して,

$$\| e^{-\varepsilon a c_\varepsilon(t-s)} (\Psi(t, s)\vec{q}_0 - (U(t, s)\vec{q}_0) \cdot \vec{f}^\varepsilon(t)) \|_{X_{\varepsilon a}} \leq C_a (1 + \varepsilon^3(t-s))^{-\frac{1}{4}} \|\vec{q}_0\|_{X_{\varepsilon a}},$$

$$\| e^{-\varepsilon a c_\varepsilon(t-s)} (\Psi(t, s)\vec{q}_0 - (U(t, s)\vec{q}_0) \cdot \vec{f}^\varepsilon(t)) \|_{X_{\varepsilon a, \infty}} \leq C_a (1 + \varepsilon^3(t-s))^{-\frac{1}{2}} \|\vec{q}_0\|_{X_{\varepsilon a}}.$$

ここで, $\vec{f}^\varepsilon = {}^t(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon)$, $f_1^\varepsilon(t, m) = {}^t(\varepsilon^{-\frac{5}{2}}(e^{\partial_x} - 1)^{-1} \partial_x r_c(m - ct), -\varepsilon^{-\frac{5}{2}} c(e^{\partial_x} - 1)^{-1} \partial_x^2 r_c(m - ct))$, $f_2^\varepsilon = -2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nu_{1, \varepsilon} c_\varepsilon \partial_c \vec{Q}_{c_\varepsilon}$, $(U(t, s)\vec{q}_0)(n) = {}^t(u_1, u_2)(t, s, n)$, (u_1, u_2) は方程式

$$(DW) \quad \begin{cases} c_\varepsilon^{-1} \partial_t u_1 = \varepsilon^{-1} \nu_{2, \varepsilon} \partial_y^2 u_1 + 2\varepsilon^3 \nu_{1, \varepsilon} u_2 - \varepsilon^{-1} \nu_{3, \varepsilon} \partial_y^2 u_2, \\ c_\varepsilon^{-1} \partial_t u_2 = \frac{\nu_{1, \varepsilon}}{2\varepsilon} \partial_y^2 u_1 - \frac{\nu_{3, \varepsilon}}{4\varepsilon^5} \partial_y^4 u_1 + \varepsilon^{-1} \nu_{2, \varepsilon} \partial_y^2 u_2, \\ u_k(s, s, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon^2 \eta_a}^{\varepsilon^2 \eta_a} \sum_{M \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}_n \vec{q}_0)(M, \eta) \cdot \overline{f_k^{\varepsilon, *}(S, M)} e^{iy\eta} d\eta, \quad (k = 1, 2), \end{cases}$$

の解, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\nu_{1, \varepsilon} - \frac{1}{6}| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\nu_{2, \varepsilon} - \frac{2}{3}| = 0$, $\nu_{1, \varepsilon}, \nu_{2, \varepsilon}, \nu_{3, \varepsilon} \in \mathbb{R}$, $f_k^{\varepsilon, *}$ は非自明な実数値関数, $(\mathcal{F}_n f)(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-in\eta}$. さらに, $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ に対し, ある $K_\varepsilon > 0$ が存在し, $\vec{q}_0 \in Z_{\varepsilon a, 3}$, $t > s$ に対し,

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-\varepsilon a c_\varepsilon(t-s)} \left((U(t, s)\vec{q}_0) \cdot \vec{f}^\varepsilon(t) - \sqrt{2\pi} \varepsilon^2 \left(\sum_{M \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}_n \vec{q}_0)(M, 0) \cdot \overline{f_2^{\varepsilon, *}(s, M)} \right) f_2^\varepsilon(t) \right) \right\|_{Z_{\varepsilon a, -3}} \\ & \leq K_\varepsilon (1 + t - s)^{-\frac{1}{4}} \|\vec{q}_0\|_{Z_{\varepsilon a, 3}}. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし,

$$\| {}^t(u, v) \|_{Z_{a, l}} = \left(\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{2am} (1 + n^2)^l (|(e^{\partial_m} - 1)u|^2 + |(e^{\partial_n} - 1)u|^2 + |v|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

注意 3. 主定理の評価に現れる $e^{-\varepsilon a c_\varepsilon(t-s)}$ は空間重みと合わせると $e^{\varepsilon a(m - c_\varepsilon(t-s))}$ となるため、進行波の座標系では自然な時間重みである.

注意 4. 評価 (1) により, 線形化方程式 (L) の解 $\Psi(t, s)\vec{q}_0$ の主要部 $(U(t, s)\vec{q}_0) \cdot \vec{f}^\varepsilon(t)$ が進行波座標系で広義一様に変数 n に依存しない関数に漸近することがわかる. すなわち, 進行波座標系において, 一般には, $\Psi(t, s)\vec{q}_0$ のエネルギーノルムは時刻無限大で無限大に増大する.

(2FPU) で $X = \varepsilon(m - t)$, $Y = \varepsilon^2 n$, $T = \varepsilon^3 t$, $u = \varepsilon \partial_X q$ とおき, 形式的に $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限である低振幅長波長極限を考えると, KP-II 方程式

$$\partial_T u + \frac{1}{24} \partial_X^3 u + \partial_X(u^2) + \frac{1}{2} \partial_X^{-1} \partial_Y^2 u = 0$$

が現れることが知られている [DEWZ, PS]. このとき, 低振幅長波長極限により, 線状進行波はある意味で KP-II 方程式の線ソリトンに収束する. 低振幅長波長近似によって, KP-II 方程式の線ソリトンに収束する線状進行波の例としては, 4 階の波動方程式である Benney–Luke 方程式の線状進行波が知られている. Benney–Luke 方程式の線状進行波の線形安定性については Mizumachi–Shimabukuro [MS] により示されている. [MS] では Mizumachi[Mi] による線ソリトン周りの線形化 KP-II 方程式の解析と分岐解析を用いて, 線形化作用素の低周波部分を線形化 KP-II 方程式で近似し, 高周波部分のレゾルベント評価と組み合わせることで, 発展作用素の評価を得ている.

線形化方程式 (L) は非自励系であるため, そのまま線形化解析を行うのは難しい. そこで, Friesecke–Pego によって導入された

$$(\mathcal{T}W)(\tau, m, n) = W(m - \tau, n), \quad (W : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C})$$

を用いて, 方程式 (L) の解析と半離散作用素 B_ε のスペクトル問題

$$B_\varepsilon \vec{u} = \lambda \vec{u}, \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

を結びつける. ただし,

$$B_\varepsilon = c_\varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} c_\varepsilon \varepsilon \partial_x & 0 & e^{\varepsilon \partial_x} - 1 \\ 0 & c_\varepsilon \varepsilon \partial_x & e^{\varepsilon^2 \partial_n} - 1 \\ (1 - e^{-\varepsilon \partial_x}) \mathcal{M}_{V''(r_{c_\varepsilon}(\cdot))} & 1 - e^{-\varepsilon^2 \partial_n} & c_\varepsilon \varepsilon \partial_x \end{pmatrix}.$$

このとき, [MS] で行われた解析に加え, 連続極限を用いた近似と虚軸方向に対する周期的なスペクトルの解析を組み合わせ, 半離散作用 B_ε の発展作用素に関する評価を得た. さらに, スペクトルの情報から解の分散性を考慮した主要部分を引くことで, エネルギーノルムでの減衰評価を得た.

参考文献

- [DEWZ] D.B. Duncan, J.J.C. Eilbeck, C.H. Walshaw and V.E. Zakharov, Phys. Lett. A **158** (3) (1991) 107–111.
- [FP1] G. Friesecke and R. L. Pego, Nonlinearity **12** (1999), no.6, 1601–1627.
- [FP2] G. Friesecke and R. L. Pego, Nonlinearity **17** (2004), no.1, 229–251.
- [Mi] T. Mizumachi, Mem. Amer. Math. Soc. **238** (2015), no. 1125, vii+95 pp.
- [MS] T. Mizumachi and Y. Shimabukuro, Nonlinearity, **30** (2017), 3419–3465.
- [PS] D.E. Pelinovsky and G. Schneider, SIAM J. Appl. Math. **83** (2023), no.1, 79–98.