

Lower bound estimate for the dissipative NLS in the modulation space

瀧澤 駿 (東京理科大学工学部)*

1 導入・先行研究

本講演では、次の非線形消散型 Schrödinger 方程式の初期値問題を扱う:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \lambda|u|^{p-1}u, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

ここで、未知関数 $u(t, x)$ および、初期データ $u_0(x)$ は複素数値であり、 $p > 1$ および、 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は、 $\text{Im } \lambda < 0$ をみたすとする。条件 $\text{Im } \lambda < 0$ は、(NLS) の解に消散効果をもたらす。実際、形式的な計算により

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = 2 \text{Im } \lambda \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq 0$$

となり、解の質量は単調減少することが分かる。そこで、(NLS) の時間大域解の質量が時刻無限大で 0 に近づくか否かが自然な問題として挙げられる。この問題に関してこれまでに数多くの研究がなされており、以下のことが分かっている:

- $p \leq 1 + \frac{2}{n}$ のとき、初期データの適切な仮定の下で、 $\|u(t)\|_{L^2} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となる (see [5, 3, 1, 2] etc.).
- $p > 1 + \frac{2}{n}$ のとき、非自明解の質量は正定数で下から評価される: $\inf_{t \in [0, \infty)} \|u(t)\|_{L^2} > 0$ (see [4]).

後者の研究に関して、より正確には、空間次元が $n = 1, 2, 3$ で小さな初期データに対して、 L^2 ベースの重み付き Sobolev 空間 $H^s \cap \mathcal{F}H^s$ の枠組みで証明を行っている (Sato [4, Theorem 1.1]). この証明では、非線形項の冪にエネルギー劣臨界の条件が課され、Sobolev 埋め込みから生じる条件 $s > \frac{n}{2}$ および、非線形項の原点での特異性を回避するための条件 $s < p$ と組み合わせると、

$$\frac{n}{2} < s < p < 1 + \frac{4}{n-2}$$

となり、少なくとも空間 5 次元以上は扱うことはできない。

* 〒125-8585

東京都葛飾区新宿 6 丁目 3-1

東京理科大学 工学部

e-mail: 1123703@ed.tus.ac.jp

キーワード: 非線形消散型 Schrödinger 方程式, 長時間挙動, modulation 空間

また, 初期データが高振動する特別な形状の場合 ($u_0 = e^{ib|x|^2} v_0$, $v_0 \in H^1 \cap \mathcal{F}H^1$, $b = b(v_0) > 0$) には, 初期データのサイズ条件を課さず, 任意の空間次元において, 非自明解の L^2 -ノルムに対する下からの評価が得られている (Sato [4, Theorem 1.2]).

2 主結果

先行研究 [4] では, 重み付き Sobolev 空間を用いているため, 一般の小さな初期データに対して高次元の場合を扱うことはできない. そこで本講演では, 重み付き Sobolev 空間の代わりに modulation 空間を採用することにより, 一般の小さな初期データに対して, 4 次元以上の場合でも解の下からの評価が得られることを紹介する. 主結果を述べる前に, ここに現れた modulation 空間を定義する.

定義 1 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ に対し, modulation 空間 $M^{p,q}$ を次で定義する:

$$M^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|f\|_{M^{p,q}} := \| \|V_g f(x, \xi)\|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} < \infty\}.$$

ただし, $V_g f(x, \xi) = \mathcal{F}[\overline{g(\cdot - x)} f](\xi)$ (短時間 Fourier 変換) である.

定理 1 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $p \in 2\mathbb{N} + 1$ ($n \geq 2$), $p \in 2\mathbb{N} + 3$ ($n = 1$) と仮定する. また, $\delta > 0$ に対して, 初期データに $0 \neq v_0 \in M^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ かつ, $u_0 = \delta v_0$ を課す. このとき, ある $\delta_0 > 0$ が存在して, 任意の $\delta \in (0, \delta_0)$ に対して, (NLS) の時間大域解 u が,

$$u \in C([0, \infty); L^2) \cap \langle \cdot \rangle^{-\frac{n(p-1)}{2(p+1)}} L^\infty([0, \infty); M^{p+1,1})$$

において一意的に存在する. そのうえ, この解 u は, 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して,

$$\|u(t)\|_{L^2} \geq C\delta$$

をみたす. ただし, $C > 0$ は, $t, \delta > 0$ に依存しない定数である.

参考文献

- [1] N. Hayashi, C. Li, P. I. Naumkin, *Time decay for nonlinear dissipative Schrödinger equations in optical fields*, Adv. Math. Phys. (2016), Art. ID 3702738, 7 pp.
- [2] N. Hayashi, C. Li, P. I. Naumkin, *Upper and lower time decay bounds for solutions of dissipative nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **16** (2017), no. 6, 2089–2104.
- [3] N. Kita, A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 1, 39–64.
- [4] T. Sato, *Lower bound estimate for the dissipative nonlinear Schrödinger equation*, Partial Differ. Equ. Appl. **2** (2021), no. 5, 11 pp.
- [5] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), no. 7-9, 1407–1423